

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Μ. Τρίτη 30 Απριλίου 2013

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
 Να αποδείξετε ότι, αν $f'(x) > 0$ στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Μονάδες 9

A2. α. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f .

Μονάδες 3

β. Αν f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$ τότε, ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες γράφεται

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx - \int_a^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta$$

β) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|^v = |z^v|$, $v \in \mathbb{N}^*$.

γ) Κάθε συνάρτηση $1-1$, είναι γνησίως μονότονη.

δ) Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$.

ε) Για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ η συνάρτηση $f(x) = x^{-v}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* με $f'(x) = -vx^{-v-1}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\bar{z}(z+2) = -|1-i|^2 \cdot z - 3 \quad \text{και} \quad w = 2z - i,$$

B1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z . Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του \bar{z} ;

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του $|z - \bar{z}|$ και τις τιμές του z για τις οποίες επιτυγχάνεται.

Μονάδες 6

B3. Αν για τους μιγαδικούς z των προηγούμενων ερωτημάτων ισχύει $|z - \bar{z}| = 2$ και $\text{Im}(z) > 0$, τότε να υπολογίσετε την τιμή του $\left(\frac{z - \bar{z}}{2}\right)^{2013}$.

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών w και να αποδείξετε ότι η απόσταση των εικόνων των z και w είναι ίση με την απόσταση της εικόνας του z από το σημείο $A(0,1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \ln a, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Γ1. Βρείτε τον $a \in (0, +\infty)$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη και δείξτε ότι

$$f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Εστώ $a = e$.

Μονάδες 7

Γ2. α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της και τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, εφόσον υπάρχουν.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \frac{1}{f(t)+1} dt = \frac{1}{2013}$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f , G και F , οι οποίες είναι ορισμένες στο διάστημα $[0, +\infty)$ με f παραγωγίσιμη και G δύο φορές παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα.

Έστω ότι ισχύουν: $f(0) = 1$, $G(0) = 0$ και για κάθε $x \geq 0$

$$\text{είναι } f'(x) > 0, G'(x) > 1 \text{ και } F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $F(x) \geq 0$ και $G(x) \geq x$ για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} [F(x) \ln x]$ και να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) \ln \xi + \frac{F(\xi)}{\xi} = 0$.

Μονάδες 7

Δ3. Δίνεται, επιπλέον, ότι

$$f'(x) F(x) + f^2(x) = G''(x)[G(x) - x] + [G'(x) - 1]^2, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α. $F(x) = G(x) - x$, για κάθε $x \geq 0$.

Μονάδες 7

β. Για κάθε $x_0 > 0$, οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων C_F, C_G στα σημεία τους $B(x_0, F(x_0))$ και $\Gamma(x_0, G(x_0))$ αντιστοίχως, τέμνονται σε σημείο A του άξονα $y'y$ (**μονάδες 3**) και το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισεμβαδικό με το χωρίο, που ορίζεται από τις C_F, C_G και την ευθεία $x = x_0$ (**μονάδες 3**).

Μονάδες 6