ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 7 Απριλίου 2013
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για κάθε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$

Μονάδες 9

Α.2. α) Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται άρτια;

Μονάδες 3

β) Πότε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α λέγεται περιοδική;

Μονάδες 3

Α.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Μονάδες 2

β) Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$ τότε $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$

Μονάδες 2

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ έχει πεδίο ορισμού της το σύνολο $\mathbb{R}_1 = \{x \mid \eta\mu x \neq 0\}$

Μονάδες 2

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = \varphi(x + c)$ όπου $c > 0$, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες προς τα δεξιά.

Μονάδες 2

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Έστω το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+(\alpha+\beta)x^2+(2\alpha+5\beta)x+3$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Β.1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το $x+1$ να είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$ να ισούται με -9

Μονάδες 8

Β.2. Για $\alpha=-7$ και $\beta=2$:

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

Μονάδες 5

β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Μονάδες 6

γ) Αν $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{\upsilon(x)}{P(x)}\geq 0$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases}\eta\mu(\pi+\theta)x+\sigma\upsilon\nu(-\theta)y=1\\ \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)x-\eta\mu(\theta-\pi)y=1\end{cases}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Γ.1. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x,y)=(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta,\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 12

Γ.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(10^{\alpha}-3)\sigma\upsilon\nu x-4$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή το 3

Μονάδες 6

β) Για α = 1, να βρείτε τις τιμές του $\theta\in\mathbb{R}$ για τις οποίες $xy=f(\theta)$ όπου (x, y) είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\left[\ln\left(e^x-e^2\right)\right]^2-3}{\ln\left(e^x-e^2\right)-2}$

Δ.1. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\ln\left(2e^2\right)$, $\ln\left(e^3+e^2\right)$, 2 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 7

Δ.2. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{y^2-3}{y-2}\geq 6$

Μονάδες 5

Δ.3. Έστω $x_0=\ln\left(e^3+e^2\right)$:

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(x_0\right)=6$

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq f\left(x_0\right)$ για κάθε $x\in\left(\ln\left(2e^2\right),+\infty\right)$. (μονάδες 5)
Είναι το $f\left(x_0\right)$ ελάχιστο της συνάρτησης; (μονάδες 3)

Μονάδες 8