

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 8 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία. Σελίδα 43 του σχολικού βιβλίου.
A2. Θεωρία Σελίδα 58 του σχολικού βιβλίου.
A3. Θεωρία. Σελίδα 83 του σχολικού βιβλίου.
A4. α. Σωστό
 β. Λάθος
 γ. Λάθος
 δ. Σωστό
 ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow$
 $2\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}|^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow$
 $2 \cdot (\sqrt{2})^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 3 \cdot 1^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1.$

B2. Έστω $\varphi = (\widehat{\vec{\alpha}}, \widehat{\vec{\beta}})$, τότε γνωρίζουμε ότι:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \stackrel{(B1)}{\Leftrightarrow} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 1} \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ άρα } \hat{\varphi} = 45^\circ.$$

B3. $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 1 + 1^2 = 5 \Rightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \sqrt{5}$
 $|2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 = (2\vec{\alpha})^2 - 2 \cdot 2\vec{\alpha} \cdot 3\vec{\beta} + (3\vec{\beta})^2 = 4(\sqrt{2})^2 - 12 \cdot 1 + 9 \cdot 1^2 = 5$
 $\Rightarrow |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| = \sqrt{5}$
 Οπότε $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|.$

Δεύτερος τρόπος.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}| \quad \text{ή} \quad (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})^2 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 12\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 9\vec{\beta}^2$$

$$\text{ή} \quad 3\vec{\alpha}^2 - 14\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 8\vec{\beta}^2 = 0 \quad \text{ή} \quad 3 \cdot 2 - 14 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 0, \text{ ισχύει.}$$

B4. Έστω $\vec{\gamma} = \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$, τότε γνωρίζουμε ότι $\vec{\gamma} // \vec{\alpha}$ δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός μ ώστε να ισχύει $\vec{\gamma} = \mu \cdot \vec{\alpha}$ (1).

Σύμφωνα με τον τύπο $\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}}(2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ έχουμε:

$$\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \vec{\alpha} \cdot (\mu \cdot \vec{\alpha}) \Leftrightarrow$$

$$\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) = \mu |\vec{\alpha}|^2 \Leftrightarrow \mu = \frac{\vec{\alpha} \cdot (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}|^2} \Leftrightarrow \mu = \frac{2|\vec{\alpha}|^2 - 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}$$

$$\mu = \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 1}{2} \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}.$$

Τελικά από τη σχέση (1) προκύπτει: $\vec{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\alpha}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τις κορυφές Β, Γ του τριγώνου είναι: $\lambda_{\text{BG}} = \frac{y_{\Gamma} - y_{\text{B}}}{x_{\Gamma} - x_{\text{B}}} = \frac{1 - 4}{2 - 4} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$.

Η εξίσωση της πλευράς ΒΓ του τριγώνου θα είναι:

$$y - y_{\Gamma} = \lambda_{\text{BG}} (x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{3}{2} (x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{3}{2} x - \frac{3}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{3}{2} x - 3 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} x - 2 \Leftrightarrow 2y = 3x - 4 \Leftrightarrow 3x - 2y - 4 = 0.$$

Το ύψος ΓΔ του τριγώνου είναι κάθετο στην πλευρά ΑΒ οπότε θα ισχύει:

$$\Gamma\Delta \perp \text{AB} \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} \cdot \lambda_{\text{AB}} = -1 \quad (1)$$

$$\text{Όμως } \lambda_{\text{AB}} = \frac{y_{\text{B}} - y_{\text{A}}}{x_{\text{B}} - x_{\text{A}}} = \frac{4 - (-1)}{4 - 5} = \frac{4 + 1}{-1} = -5$$

$$\text{Από (1)} \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} \cdot (-5) = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{1}{5}.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

E_3.Μλ2ΘΤ(α)

Η εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου θα είναι:

$$y - y_{\Gamma} = \lambda_{\Gamma\Delta} (x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{5}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{3}{5} \Leftrightarrow 5y = x + 3 \Leftrightarrow x - 5y + 3 = 0.$$

Γ2. Για τις ευθείες που διέρχονται από την κορυφή Γ του τριγώνου διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η περίπτωση: Εξετάζουμε αν η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_1 : x = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0$ είναι λύση, δηλαδή αν $d(O, \varepsilon_1) = 2$.

$$\text{Έχουμε: } d(O, \varepsilon_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{1}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Άρα η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon_1 : x = 2$ αποτελεί λύση.

2^η περίπτωση: Εξετάζουμε αν υπάρχουν ευθείες της μορφής: $\varepsilon : y - y_{\Gamma} = \lambda(x - x_{\Gamma}) \Leftrightarrow y - 1 = \lambda(x - 2) \Leftrightarrow y - 1 = \lambda x - 2\lambda \Leftrightarrow \lambda x - y + 1 - 2\lambda = 0$ που να αποτελούν επίσης λύση.

Πρέπει και αρκεί:

$$d(O, \varepsilon) = 2 \Leftrightarrow \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 2 \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{|1 - 2\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |1 - 2\lambda| = 2\sqrt{\lambda^2 + 1} \quad (|1 - 2\lambda| \geq 0, 2\sqrt{\lambda^2 + 1} > 0) \Leftrightarrow |1 - 2\lambda|^2 = (2\sqrt{\lambda^2 + 1})^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - 2\lambda)^2 = 4(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 = 4\lambda^2 + 4 \Leftrightarrow 4\lambda = -3 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{4}$$

Άρα η ευθεία,

$$\varepsilon : -\frac{3}{4}x - y + 1 - 2\left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}x - y + 1 + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow -3x - 4y + 10 = 0$$

αποτελεί επίσης λύση.

Γ3. i) Αφού η παραβολή C έχει κορυφή το $O(0, 0)$ και άξονα συμμετρίας τον $y'y$, θα έχει εξίσωση της μορφής $C : x^2 = 2py$.

$$\Gamma(2, 1) \in C \Leftrightarrow x_{\Gamma}^2 = 2py_{\Gamma} \Leftrightarrow 2^2 = 2p \cdot 1 \Leftrightarrow 2p = 4 \Leftrightarrow p = 2.$$

Άρα η εξίσωση της παραβολής είναι $C : x^2 = 2 \cdot 2y \Leftrightarrow x^2 = 4y$.

- ii) Έστω ε η εφαπτομένη της C που είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$.
Αν $M(x_1, y_1)$ το σημείο επαφής της ε με την C θα είναι:

$$\varepsilon: xx_1 = p(y + y_1) \Leftrightarrow xx_1 = 2(y + y_1) \Leftrightarrow$$

$$xx_1 = 2y + 2y_1 \Leftrightarrow 2y = x_1x - 2y_1 \Leftrightarrow y = \frac{x_1}{2}x - y_1 \quad (2)$$

$$\text{Αφού } \varepsilon \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x_1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x_1 = 3.$$

$$\text{Όμως το } M(x_1, y_1) \in C \Leftrightarrow x_1^2 = 4y_1 \Leftrightarrow 3^2 = 4y_1 \Leftrightarrow 4y_1 = 9 \Leftrightarrow y_1 = \frac{9}{4}.$$

$$(2) \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} \Leftrightarrow 4y = 6x - \frac{9}{1} \Leftrightarrow 4y = 6x - 9 \Leftrightarrow 6x - 4y - 9 = 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $C_1: 3x^2 + 4y^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1,$

Έχουμε: $\alpha^2 = 4, \beta^2 = 3$ και επειδή $4 > 3$ οι εστίες της C_1 βρίσκονται στον x' αξονα.

$$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \gamma^2 = 4 - 3 \Leftrightarrow \gamma^2 = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1.$$

$E'(-1,0), E(1,0)$ και $B(0, \sqrt{3})$ ή $B(0, -\sqrt{3})$.

$$(BE') = \sqrt{(x_{E'} - x_B)^2 + (y_{E'} - y_B)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (0 \pm \sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$(BE) = \sqrt{(1-0)^2 + (0 \pm \sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$(E'E) = \sqrt{(1+1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2^2} = 2$$

Το τρίγωνο $BE'E$ είναι ισόπλευρο.

Δεύτερος τρόπος

BO (ή $B'O$) ύψος και διάμεσος του τριγώνου $BE'E$ (ή $B'E'E$), άρα $BE = BE'$.

$$\text{Το } B \text{ είναι σημείο της έλλειψης } (BE) + (BE') = 2a \stackrel{a=2}{\Rightarrow} (BE) = (BE') = 2.$$

Επίσης $(E'E) = 2$, επομένως το τρίγωνο είναι ισόπλευρο πλευράς 2.

- Δ2. Αν αντικαταστήσουμε $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ στις εξισώσεις των δύο κωνικών, παρατηρούμε ότι επαληθεύονται.

$$\text{Πράγματι: } 3(\sqrt{2})^2 + 4\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{3}{2} = 12 \text{ και } (\sqrt{2})^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2},$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

E_3.Μλ2ΘΤ(α)

άρα το σημείο $P(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ είναι κοινό των C_1, C_2 .

Το σύστημα των εξισώσεων των C_1, C_2 μπορεί να θεωρηθεί ως σύστημα με αγνώστους x^2, y^2 . Δεδομένου ότι έχει τη λύση $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ οι υπόλοιπες

λύσεις θα είναι: $(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ ή $(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}})$, που είναι και οι συντεταγμένες των υπολοίπων κοινών σημείων.

Δεύτερος τρόπος.

Τα σημεία τομής των κωνικών προκύπτουν από τις λύσεις του συστήματος.

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ 4x^2 + 4y^2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} & x = \sqrt{2} & x = -\sqrt{2} & x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ή } y = -\sqrt{\frac{3}{2}} & y = -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{ ή } y = \sqrt{\frac{3}{2}} & y = \sqrt{\frac{3}{2}} & y = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

Τρίτος τρόπος

Αφού παρατηρήσουμε ότι $P(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$ είναι κοινό σημείο των C_1, C_2 και γνωρίζοντας ότι οι κωνικές έχουν άξονες συμμετρίας $x'x$, $y'y$ και κέντρο συμμετρίας το O , συμπεραίνουμε ότι τα υπόλοιπα κοινά σημεία είναι:

$$(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \text{ ή } (-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) \text{ ή } (-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}).$$

Δ3. $2(OM)^2 = 7 \Leftrightarrow (OM) = \sqrt{\frac{7}{2}}$, άρα το M θα είναι σημείο του κύκλου C_2 .

$(ME) + (ME') = 4 \Leftrightarrow (ME) + (ME') = 2a$, άρα το M είναι σημείο της έλλειψης C_1 . Το M είναι κοινό σημείο των C_1, C_2 , επομένως από το Δ2,

$$M(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) \text{ ή } M(\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \text{ ή } M(-\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) \text{ ή } M(-\sqrt{2}, -\sqrt{\frac{3}{2}}).$$

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_1 , έστω ε_p , στο $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ είναι:

$$\varepsilon_p : \frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1 \Leftrightarrow 3xx_1 + 4yy_1 = 12 \Leftrightarrow 3x\sqrt{2} + 4y\sqrt{\frac{3}{2}} = 12.$$

$$\text{Η } \varepsilon_p \text{ έχει συντελεστή διεύθυνσεως } \lambda = -\frac{\frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}}{\frac{3}{2\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Σύμφωνα με την ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{EP\bar{E}}$, έστω δ , είναι η ευθεία που είναι κάθετη στην εφαπτομένη ε_p στο σημείο P , επομένως αν λ' είναι ο συντελεστής διεύθυνσεως της δ , τότε:

$$\lambda \cdot \lambda' = -1 \Leftrightarrow \lambda' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Η ευθεία δ διέρχεται από το $P\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσεως

$$\lambda' = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ άρα, } \delta : y - \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{2}).$$