

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2003

## ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### Θέμα 1ο

**Β. α) Λάθος** διότι η  $f$  είναι «1-1» που σημαίνει δεν είναι πάντα γνησίως μονότονη.

**β) Σωστό** διότι  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$  άρα  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$

**γ) Σωστό** διότι από Θ.Μ.Τ. υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιος ώστε:

$$f'(x_0) = \frac{f(a) - f(\beta)}{a - \beta} > 0 \text{ διότι } f \uparrow \text{ άρα } f(a) < f(\beta)$$

**δ) Λάθος** διότι  $f''(x) \geq 0, x \in \Delta$ . (Παράδειγμα: για την  $f(x) = x^4$  είναι:

$$f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R})$$

**ε) Σωστό** διότι αν  $f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  τότε  $\int_a^\beta f(x) dx = 0$  (άτοπο)

**στ) Σωστό** διότι αν η  $f$  δεν παίρνει 2 τουλάχιστον ετερόσημες τιμές θα είναι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ . Όμως η  $f$  δεν είναι παντού ίση με μηδέν, οπότε

$$\int_a^\beta f(x) dx > 0 \text{ άτοπο.}$$

### Θέμα 2ο

**Α.**  $A = (0, +\infty)$  πεδίο ορισμού

$$f'(x) = \frac{(\ln(ax))' \cdot \sqrt{x} - \ln(ax) \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{ax} \cdot (ax)' \cdot \sqrt{x} - \ln(ax) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(ax)}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln(ax)}{2x\sqrt{x}} \quad (1)$$

$$\text{Είναι } f'(1) = \frac{2 - \ln a}{2} = 1 \Leftrightarrow 2 - \ln a = 2 \Leftrightarrow \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

**Β. α)** Για  $\alpha=1$  έχουμε:

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, x > 0 \text{ και } f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}, x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

$x$	0	$e^2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$			

$\max$

$$f(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e} (\max)$$

**β)**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x \right] = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Άρα  $f((0, e^2]) = \left(-\infty, \frac{2}{e}\right]$  και  $f([e^2, +\infty)) = \left[\frac{2}{e}, 0\right)$

Η  $x=0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη και η  $y=0$  οριζόντια ασύμπτωτη.

**γ)**  $\ln(\sqrt{\kappa})^{\sqrt{\kappa+1}} > \ln(\sqrt{\kappa+1})^{\sqrt{\kappa}} \Leftrightarrow$

$$\sqrt{\kappa+1} \cdot \ln \sqrt{\kappa} > \sqrt{\kappa} \cdot \ln \sqrt{\kappa+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\kappa+1} \cdot \ln \kappa > \sqrt{\kappa} \cdot \ln(\kappa+1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln \kappa}{\sqrt{\kappa}} > \frac{\ln(\kappa+1)}{\sqrt{\kappa+1}} \Leftrightarrow$$

$f(\kappa) > f(\kappa+1)$  ισχύει διότι

$\kappa+1 > \kappa \geq 8 > e^2$  και  $f \downarrow$  στο  $[e^2, +\infty)$

### Θέμα 3ο

$$\begin{aligned} \text{A. } \alpha) z_1 &= \frac{1 + \beta - i(a - \beta i)}{1 + f(\beta) - i[f(a) - i \cdot f(\beta)]} = \frac{1 - i \cdot a}{1 - i \cdot f(a)} = \\ &= \frac{(1 - i \cdot a)(1 + i \cdot f(a))}{[1 - i \cdot f(a)] \cdot [1 + i \cdot f(a)]} = \frac{(1 + a \cdot f(a)) + i(-a + f(a))}{1 + f^2(a)} \end{aligned}$$

$$z_1 \in \mathbb{R} \text{ αν και μόνο αν } -a + f(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = a$$

**β)** Ισχύει  $z = -iw \Leftrightarrow a + \beta i = -i(f(a) + i \cdot f(\beta)) \Leftrightarrow a + \beta i = f(\beta) - if(a)$  οπότε  $f(a) = -\beta$  και  $f(\beta) = a$ . Άρα  $w = -\beta + \alpha \cdot i$ . Έστω  $A(a, \beta)$  και  $B(-\beta, a)$ . Είναι  $(OA) = \sqrt{a^2 + \beta^2}$ ,  $(OB) = \sqrt{a^2 + \beta^2}$  δηλαδή  $\triangle OAB$  ισοσκελές.

$$\begin{aligned} \text{Επειδή } (AB)^2 &= (a + \beta)^2 + (a - \beta)^2 = \\ &= a^2 + \beta^2 + 2a\beta + a^2 + \beta^2 - 2a\beta = 2(a^2 + \beta^2) = (OA)^2 + (OB)^2 \end{aligned}$$

το τρίγωνο είναι και ορθογώνιο.

$$\text{B. } \alpha) \text{ Έχουμε } |a + \beta i - i(f(a) + if(\beta))|^2 = |a + \beta i|^2 + |if(a) - f(\beta)|^2$$

$$|a + f(\beta) + i(\beta - f(a))|^2 = a^2 + \beta^2 + f^2(a) + f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$(a + f(\beta))^2 + (\beta - f(a))^2 = a^2 + \beta^2 + f^2(a) + f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$a^2 + f^2(\beta) + 2a \cdot f(\beta) + \beta^2 + f^2(a) - 2\beta \cdot f(a) = a^2 + \beta^2 + f^2(a) + f^2(\beta) \Leftrightarrow$$

$$2a \cdot f(\beta) - 2\beta \cdot f(a) = 0 \Leftrightarrow a \cdot f(\beta) - \beta \cdot f(a) = 0$$

**β)** Έστω  $A(a, \beta)$  και  $B(f(a), f(\beta))$

$$\lambda_{OA} = \frac{\beta}{a} \text{ και } \lambda_{OB} = \frac{f(\beta)}{f(a)} \text{ οι συντελεστές διεύθυνσης } OA \text{ και } OB \text{ αντίστοιχα}$$

Λόγω της (1) είναι  $\lambda_{OA} = \lambda_{OB}$  που σημαίνει  $A, O, B$  συνευθειακά.

(Είναι  $f(a) \neq 0$  διότι αν  $f(a) = 0$  τότε και  $f(\beta) = 0$  άτοπο)

**γ)** Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο  $M(x_0, f(x_0))$  είναι  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$  η οποία διέρχεται από το  $(0, 0)$  όταν  $-f(x_0) = -x_0 \cdot f'(x_0) \Leftrightarrow x_0 \cdot f'(x_0) - f(x_0) = 0$ . Αρκεί να αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο  $(a, \beta)$  η εξίσωση

$$x \cdot f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{f(x)}{x} \right)' = 0.$$

$$\text{Έστω } g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in [a, \beta]$$

- Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[a, \beta]$  και
- $g(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{a} = \frac{f(\beta)}{\beta} = g(\beta)$  λόγω της (1)

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, έχει μία τουλάχιστον λύση στο  $(\alpha, \beta)$  η εξίσωση  $g'(x) = 0$  δηλαδή η ισοδύναμη της  $x \cdot f'(x) - f(x) = 0$

### Θέμα 4ο

$$\alpha) \int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt = -2 \int_0^x t f'(t) dt - 4x \cdot f(x) \cdot \int_0^1 t dt$$

$$\int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt = -2 \int_0^x t \cdot f'(t) dt - 4x \cdot f(x) \cdot \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1$$

$$\int_0^x (t^2 + 1) f''(t) dt = -2 \int_0^x t \cdot f'(t) dt - \frac{4}{2} x \cdot f(x) \cdot (1)$$

Με παραγωγή των μελών της (1) έχουμε:

$$(x^2 + 1) f''(x) = -2x \cdot f'(x) - 2f(x) - 2x \cdot f'(x)$$

$$(x^2 + 1) f''(x) + 2x \cdot f'(x) = -2f(x) - 2x \cdot f'(x)$$

$$\left[ (x^2 + 1) f'(x) \right]' = \left[ -2x \cdot f'(x) \right]', \text{ άρα } (x^2 + 1) f'(x) = -2x \cdot f(x) + C_1 \quad (2)$$

Για  $x = 0$  είναι  $f'(0) = C_1$  άρα  $C_1 = 2$

Η (2) γράφεται:

$$(x^2 + 1) f'(x) + 2x \cdot f(x) = 2$$

$$\left[ (x^2 + 1) f(x) \right]' = (2x)' \text{ Άρα } (x^2 + 1) \cdot f(x) = 2x + C_2$$

Για  $x = 0$  είναι  $f(0) = C_2$  άρα  $C_2 = 0$ . Επομένως  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

β' μέθοδος

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\left[ (t^2 + 1) f'(t) \right]_0^x - \int_0^x 2t f'(t) dt = -2 \int_0^x t f'(t) dt - 4x f(x) \int_0^1 t dt \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1) f'(x) - f'(0) = -4x \cdot f(x) \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1) f'(x) - 2 = -2x \cdot f(x) \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 1) f'(x) + 2x \cdot f(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\left[ (x^2 + 1)f(x) \right]' = (2x)'$$

$$\text{Άρα } (x^2 + 1)f(x) = 2x + c$$

Για  $x=0$  είναι  $f(0) = c$  δηλαδή  $c=0$  οπότε  $(x^2 + 1)f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

$$\beta) E(a) = \int_0^a \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int_0^a (\ln(x^2 + 1))' dx = \left[ \ln(x^2 + 1) \right]_0^a = \ln(a^2 + 1).$$

Το  $a$  είναι συνάρτηση του χρόνου οπότε:

$$E'(a) = \left[ \ln(a^2(t) + 1) \right]' = \frac{1}{a^2(t) + 1} (a^2(t) + 1)' = \frac{2a(t) \cdot a'(t)}{a^2(t) + 1}.$$

$$\text{Είναι } a'(t) = \frac{10}{3} \text{ cm/sec και } a(t) = 3 \text{ cm, άρα } E'(1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot \frac{10}{3}}{9 + 1} \text{ cm}^2/\text{sec} = 2 \text{ cm}^2/\text{sec}.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του  $E(a)$  όταν  $a = 3 \text{ cm}$ .

γ) i) Αφού  $x \rightarrow +\infty$  για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$-|f(x)| \leq g(x) + x - 2 \leq |f(x)|$$

$$-\frac{2x}{x^2 + 1} \leq g(x) - (-x + 2) \leq \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2x}{x^2 + 1} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (-x + 2)] = 0$  που σημαίνει ότι η ευθεία  $y = -x + 2$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_g$  στο  $+\infty$ .

$$\text{ii) Είναι } E = \int_0^2 |g(x) - (-x + 2)| dx = \int_0^2 |g(x) + x - 2| dx \text{ και}$$

$$|g(x) + x - 2| \leq |f(x)| \text{ (ερώτημα i)}$$

$$|g(x) + x - 2| - |f(x)| \leq 0. \text{ Άρα}$$

$$\int_0^2 [|g(x) + x - 2| - |f(x)|] dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 |g(x) + x - 2| dx - \int_0^2 \frac{2x}{x^2 + 1} dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$E - \left[ \ln(x^2 + 1) \right]_0^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$E - \ln 5 \leq 0 \Leftrightarrow E \leq \ln 5$$