

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**5^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά
«Η ΥΠΑΤΙΑ»**



Σάββατο 20 Οκτωβρίου 2012

Α΄ Γυμνασίου

Απαντήσεις στα Θέματα

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = 85 \cdot 12 + 9 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 + 50) + 8 - 6$$

$$B = \frac{45^2 - 12}{3^2 - 2^3}$$

β) Ποιο από τα κλάσματα $\frac{A}{B}$ και $\frac{B}{A}$ είναι μεγαλύτερο;

Απάντηση

α)

$$A = 85 \cdot 12 + 9 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5 + 50) + 8 - 6$$

$$A = 1020 + 9 \cdot (60 + 50) + 8 - 6$$

$$A = 1020 + 9 \cdot 110 + 8 - 6$$

$$A = 1020 + 990 + 8 - 6$$

$$A = 2010 + 8 - 6$$

$$A = 2018 - 6$$

$$A = 2012$$

$$B = \frac{45^2 - 12}{3^2 - 2^3}$$

$$B = \frac{2025 - 12}{9 - 8}$$

$$B = \frac{2013}{1}$$

$$B = 2013$$

β) Το κλάσμα $\frac{B}{A} = \frac{2013}{2012}$ είναι μεγαλύτερο της μονάδας, επειδή ο αριθμητής του είναι μεγαλύτερος του παρονομαστή, ενώ το κλάσμα $\frac{A}{B} = \frac{2012}{2013}$ είναι μικρότερο της μονάδας, επειδή ο αριθμητής είναι μικρότερος του παρονομαστή. Επομένως το κλάσμα $\frac{B}{A}$ είναι μεγαλύτερο από το $\frac{A}{B}$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Ο καθηγητής ενός σχολείου ζήτησε από τους μαθητές του να κάνουν επανάληψη όλες τις σελίδες από την 20^η μέχρι και την 73^η.

- α)** Να βρείτε πόσες σελίδες πρέπει να διαβάσουν οι μαθητές.
- β)** Αν από τις σελίδες αυτές εξαιρέσουμε όσες διαιρούνται δια 5, πόσες σελίδες απομένουν για διάβασμα;
- γ)** Σε ολόκληρο το βιβλίο, στις σελίδες που είναι πρώτοι αριθμοί υπάρχουν σημαντικές ερωτήσεις. Πόσες και ποιες είναι οι σελίδες αυτές από την 32^η σελίδα ως και την 40^η;
- δ)** Ο Νίκος έσκισε ένα φύλλο του βιβλίου. Το άθροισμα των σελίδων του φύλλου αυτού είναι 99. Να βρείτε τις σελίδες που κόπηκαν.

Απάντηση

α) Για να βρούμε το πλήθος των σελίδων που πρέπει να διαβάσουν οι μαθητές, πρέπει να από τις 73 πρώτες σελίδες να αφαιρέσουμε όσες δεν θα διαβάσουν, δηλαδή πρέπει να αφαιρέσουμε 19 σελίδες. Έτσι το πλήθος των σελίδων που πρέπει να διαβάσουν οι μαθητές είναι $73 - 19 = 54$.

β) Οι αριθμοί που διαιρούνται δια 5 είναι αυτοί που λήγουν σε 0 ή 5. Έτσι, από το 20 μέχρι το 73 υπάρχουν οι εξής 11 αριθμοί: 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 και 70. Άρα οι μαθητές πρέπει να διαβάσουν $54 - 11 = 43$ σελίδες.

γ) Εδώ πρέπει να βρούμε τους πρώτους αριθμούς από το 32 μέχρι και το 40. Οι άρτιοι αριθμοί 32, 34, 36, 38, 40 δεν είναι πρώτοι αφού διαιρούνται δια 2. Ο 33 και ο 39 διαιρούνται με το 3, άρα δεν είναι πρώτοι, ενώ ο 35 διαιρείται με το 5, άρα δεν είναι

πρώτος. Μένει μόνο ο 37, ο οποίος είναι πρώτος αριθμός. Άρα υπάρχει μόνο μία σελίδα, η 37.

δ) Οι σελίδες που σκίστηκαν είναι διαδοχικοί αριθμοί. Ο αριθμός της μεγαλύτερης σελίδα είναι ίσος με τον αριθμό της μικρότερης συν 1. Αν λοιπόν από το 99 αφαιρέσουμε 1 βρίσκουμε το διπλάσιο του αριθμού της μικρότερης σελίδας. Άρα ο αριθμός της μικρότερης σελίδας είναι ο $(99 - 1):2 = 49$. Επομένως οι σελίδες που σκίστηκαν είναι οι 49 και 50.

ΘΕΜΑ 3^ο

Τρεις φίλοι ο Ανδρέας, ο Βασίλης και ο Γιάννης έχουν συνολικά 178 ευρώ. Αν ο Βασίλης δώσει στον Ανδρέα 4 ευρώ, τότε ο Ανδρέας και ο Βασίλης θα έχουν το ίδιο ποσό χρημάτων. Αν όμως δε γίνει αυτό και ο Γιάννης δώσει στο Βασίλη 6 ευρώ, τότε ο Βασίλης και ο Γιάννης θα έχουν το ίδιο ποσό.

α) Πόσα επιπλέον χρήματα έχει ο Βασίλης από τον Ανδρέα;

β) Πόσα επιπλέον χρήματα έχει ο Γιάννης από τον Ανδρέα;

γ) Πόσα χρήματα έχει καθένας;

Απάντηση

α) Ο Βασίλης έχει 8 ευρώ περισσότερα από τον Ανδρέα, αφού δίνοντάς του 4 ευρώ, αυτός θα έχει τώρα 4 ευρώ λιγότερα ενώ ο Ανδρέας 4 ευρώ περισσότερα και στο τέλος θα έχουν το ίδιο ποσό .

β) Με το ίδιο σκεπτικό ο Γιάννης έχει 12 ευρώ περισσότερα από το Βασίλη. Επειδή ο Βασίλης έχει 8 ευρώ περισσότερα από τον Ανδρέα, ο Γιάννης έχει $12 + 8 = 20$ ευρώ περισσότερα από τον Ανδρέα.

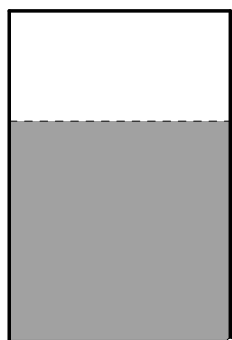
γ) Αν ο Βασίλης χάσει 8 ευρώ και ο Γιάννης 20 ευρώ, τότε και οι 3 φίλοι θα έχουν το ίδιο ποσό. Σε αυτή την περίπτωση και οι τρεις μαζί θα έχουν $178 - 28 = 150$ ευρώ. Άρα ο καθένας θα έχει 50 ευρώ. Έτσι, ο Ανδρέας έχει 50 ευρώ, ο Βασίλης $50 + 8 = 58$ ευρώ και ο Γιάννης $50 + 20 = 70$ ευρώ.

ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα ενυδρείο, από την πλευρά που το βλέπουμε, έχει σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις 30 εκατ. πλάτος και 40 εκατ. ύψος (σχήμα 1). Το ενυδρείο είναι γεμάτο με νερό κατά τα $\frac{2}{3}$ του ύψους του.

α) Αν πλαγιάσουμε το ενυδρείο όπως φαίνεται στο σχήμα 2 να βρείτε σε ποιο ύψος θα φτάσει η στάθμη του.

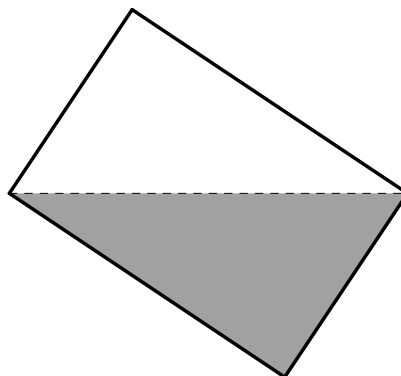
β) Περιστρέφουμε το ενυδρείο ώστε να βλέπουμε το ίδιο ορθογώνιο. Να εξετάσετε αν η στάθμη του νερού μπορεί να γίνει ποτέ η διαγώνιος του ορθογωνίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Απάντηση

α) Η επιφάνεια ολόκληρου του ορθογωνίου που βλέπουμε στο σχήμα 1, είναι $30 \cdot 40 = 1200$ τετρ. εκατ.. Το ενυδρείο είναι γεμάτο με νερό κατά τα $\frac{2}{3}$ του ύψους του. Άρα η επιφάνεια του νερού που βλέπουμε στο σχήμα 1 είναι $\frac{2}{3} \cdot 30 \cdot 40 = \frac{2400}{3} = 800$ τετρ. εκατ.. Στο σχήμα 2, η βάση του ορθογωνίου είναι 40 εκατ..

Επομένως το ύψος της στάθμης του νερού θα είναι $800 : 40 = 20$ εκατ.

β) Για να γίνει η στάθμη του νερού η διαγώνιος του σχήματος 3, πρέπει το νερό μέσα στο ενυδρείο να είναι το μισό της χωρητικότητας του ενυδρείου. Στο πρόβλημα όμως δόθηκε ότι το νερό του ενυδρείου είναι τα $\frac{2}{3}$ του συνολικού χώρου του ενυδρείου.

Επομένως κάτι τέτοιο δεν μπορεί να γίνει.