

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ  
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ν. ΗΜΑΘΙΑΣ**

**2<sup>ος</sup> Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα  
Μαθηματικά**

**«Η ΥΠΑΤΙΑ»**



**Σάββατο 21 Νοεμβρίου 2009**

**Α΄ Γυμνασίου**

**Θέμα 1ο**

Ο βρίσκεται σε ένα κινηματογράφο όπου όλες οι σειρές έχουν ακριβώς τον ίδιο αριθμό καθισμάτων. Παρατήρησε ότι μπροστά του βρισκόταν 12 σειρές καθισμάτων, πίσω του 8 , αριστερά 6 και δεξιά 8. Να υπολογίσετε πόσα καθίσματα είχε ο κινηματογράφος.

**Λύση**

Η αίθουσα του κινηματογράφου είχε συνολικά 21 σειρές καθισμάτων. (12 σειρές μπροστά από τον Mr.Math + 8 σειρές πίσω του +1 η σειρά που καθόταν ο ίδιος) .

Η κάθε σειρά είχε από 15 καθίσματα (6 καθίσματα αριστερά + 8 δεξιά του + 1 αυτό που καθόταν ο ίδιος)

Επομένως η αίθουσα συνολικά είχε  **$21 \times 15 = 315$  καθίσματα.**

## Θέμα 2<sup>ο</sup>

Η μεγάλη μαθηματικός της αρχαιότητας ΥΠΑΤΙΑ γεννήθηκε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου το 370 μ.Χ. Δεν πρόλαβε να γεράσει. Δολοφονήθηκε καθώς επέστρεφε σπίτι της. Τα χρόνια που έζησε είναι ένας αριθμός που διαιρείται με το 3 και το 5, ενώ αν διαιρεθεί με το 7 αφήνει υπόλοιπο 3. Να βρείτε πόσα χρόνια έζησε η ΥΠΑΤΙΑ και ποια χρονιά πέθανε;

### Λύση

Τα χρόνια που έζησε η Υπατία, είναι ένας αριθμός που διαιρείται με το 3 και το 5. Επομένως είναι κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 3 και 5. Άρα είναι πολλαπλάσιο του 15. Δηλαδή είναι κάποιος από τους αριθμούς 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, .....

Τα υπόλοιπά των διαιρέσεων των αριθμών αυτών με το 7 είναι αντίστοιχα: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, .....

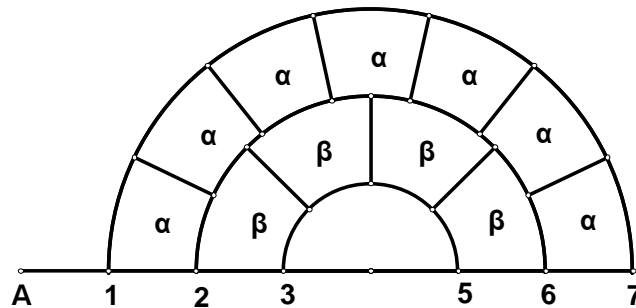
(Παρατήρηση: ο επόμενος αριθμός που είναι πολλαπλάσιο του 15 και όταν διαιρείται με το 7 αφήνει υπόλοιπο 3 είναι ο 150. Αυτός όμως απορρίπτεται από τα δεδομένα . .... Δεν πρόλαβε να γεράσει.)

Άρα η Υπατία έζησε 45 χρόνια και πέθανε το 514 μ.Χ. (370+45=415).

## Θέμα 3ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 3 ημικύκλια. Τα άκρα των ημικυκλίων απέχουν από το σημείο A τις αποστάσεις που είναι σημειωμένες στο σχήμα. Χωρίζουμε την περιοχή ανάμεσα στο μεσαίο και το μεγαλύτερο ημικύκλιο σε 7 ίσα μέρη και ονομάζουμε κάθε εμβαδόν α. Χωρίζουμε επίσης την περιοχή ανάμεσα στο μικρό και το μεσαίο ημικύκλιο σε 4 ίσα μέρη και ονομάζουμε κάθε εμβαδόν β.

Να βρείτε ποιο από τα δύο εμβαδά α ή β είναι μεγαλύτερο και να αιτιολογήσετε το συμπέρασμά σας.



## Λύση

Παρατηρούμε ότι τα 3 ημικύκλια είναι ομόκεντρα (έχουν το ίδιο κέντρο). Οι αντίστοιχες ακτίνες τους είναι: 3, 2, 1 (από το μεγαλύτερο προς το μικτότερο)

Γνωρίζουμε ότι αν ένας κύκλος έχει ακτίνα α , τότε το εμβαδόν του είναι :  $E = \pi \cdot \rho^2 \approx 3,14 \cdot \rho^2$  . Άρα το εμβαδόν του ημικύκλιου (μισός

κύκλος) θα είναι :  $\frac{3,14 \cdot \rho^2}{2} = 1,57 \cdot \rho^2$  .

Για να βρούμε το εμβαδόν των 7 τμημάτων (α) , στον εξωτερικό ημιδακτύλιο, θα αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του εξωτερικού ημικυκλίου που έχει ακτίνα 3, το εμβαδόν του εσωτερικού ημικυκλίου , που έχει ακτίνα 2. Έχουμε :

$$\text{Εμβαδόν εξωτ. ημικ.} = 1,57 \cdot \rho^2 = 1,57 \cdot 3^2 = 1,57 \cdot 9 = 14,13$$

$$\text{Εμβαδόν εσωτ. ημικ.} = 1,57 \cdot \rho^2 = 1,57 \cdot 2^2 = 1,57 \cdot 4 = 6,28$$

Επομένως το συνολικό εμβαδών των 7 τμημάτων (α) είναι:  
 $14,13 - 6,28 = 7,85$ . Άρα το εμβαδόν κάθε τμήματος (α) θα είναι

$$\frac{7,85}{7} \approx 1,12$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε το εμβαδόν του κάθε τμήματος (β). Δηλαδή θα αφαιρέσουμε από το εμβαδόν του εξωτερικού ημικυκλίου που έχει ακτίνα 2, το εμβαδόν του εσωτερικού ημικυκλίου, που έχει ακτίνα 1. Έχουμε :

$$\text{Εμβαδόν εξωτ. ημικ.} = 1,57 \cdot \rho^2 = 1,57 \cdot 2^2 = 1,57 \cdot 4 = 6,28$$

$$\text{Εμβαδόν εσωτ. ημικ.} = 1,57 \cdot \rho^2 = 1,57 \cdot 1^2 = 1,57 \cdot 1 = 1,57$$

Επομένως το συνολικό εμβαδών των 4 τμημάτων (β) είναι:  
 $6,28 - 1,57 = 4,71$ . Άρα το εμβαδόν κάθε τμήματος (β) θα είναι

$$\frac{4,71}{4} \approx 1,17$$

Άρα το εμβαδόν του τμήματος (β) είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τμήματος (α).

## Θέμα 4ο

Η τηλεφωνική Εταιρεία ΥΡΑΤΙΑPHONE προσφέρει δύο προγράμματα για τη σχολική χρονιά 2009-2010 στους μαθητές που συμμετέχουν στο διαγωνισμό ΥΠΑΤΙΑ που διενεργεί το Παράρτημα της Ελλην. Μαθηματικής Εταιρείας της Ημαθίας για τους μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Τα προγράμματα ονομάζονται «2009» και «2010».

Το πρόγραμμα « 2009 » προσφέρει για τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, 2009 δωρεάν μηνύματα Τα επιπλέον μηνύματα χρεώνονται 7 λεπτά το καθένα. Κάθε κλήση χρεώνεται προς 8 λεπτά.

Το πρόγραμμα «2010» προσφέρει 2010 δωρεάν κλήσεις, ενώ οι επιπλέον κλήσεις χρεώνονται προς 13 λεπτά κάθε μια. Κάθε μήνυμα χρεώνεται προς 7 λεπτά.

Ο Υπάτιος που συμμετέχει στο διαγωνισμό υπολογίζει ότι θα κάνει 2500 κλήσεις και θα στείλει 2500 μηνύματα. Ποιο πρόγραμμα του συμφέρει περισσότερο σύμφωνα με τους υπολογισμούς του;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

## Λύση

Το πρόγραμμα «2009» για 2500 κλήσεις και 2500 μηνύματα θα έχει το εξής κόστος:

$$\text{Κόστος μηνυμάτων: } (2500 - 2009) \cdot 0,07 = 491 \cdot 0,07 = 34,37 \text{ €}$$

$$\text{Κόστος κλήσεων : } 2500 \cdot 0,08 = 200 \text{ € .}$$

Άρα το συνολικό κόστος για το πρόγραμμα «2010» είναι :  
 $34,37 + 200 = 234,37 \text{ €}$

Το πρόγραμμα «2010» για 2500 κλήσεις και 2500 μηνύματα θα έχει το εξής κόστος:

$$\text{Κόστος μηνυμάτων: } 2500 \cdot 0,07 = 175$$

$$\text{Κόστος κλήσεων : } (2500 - 2010) \cdot 0,13 = 490 \cdot 0,13 = 63,7$$

Άρα το συνολικό κόστος για το πρόγραμμα «2009» είναι :  
 $175 + 63,7 = 238,7$

Συνεπώς ο Υπάτιος θα πρέπει να επιλέξει το πρόγραμμα «2009».