

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

6ος Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 18 Ιανουαρίου 2014

Α΄ Γυμνασίου

ΘΕΜΑ 1^ο

Ένα σχολείο έχει 50 μαθητές. Ο γυμναστής του σχολείου, θέλοντας να σχηματίσει ομάδες εργασίας, τους γράφει σε μια λίστα με αλφαβητική σειρά δίνοντάς τους και τον αντίστοιχο αύξοντα αριθμό (αριθμό καταλόγου). Δηλαδή στο μαθητή που είναι γραμμένος πρώτος στη λίστα αντιστοιχεί ο αριθμός 1 και στον τελευταίο ο αριθμός 50. Κατόπιν αναθέτει εργασίες στις 4 ομάδες, τις οποίες σχηματίζει ως εξής:

Ομάδα Α: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 2. Αυτοί αναλαμβάνουν την καθαριότητα της αυλής.

Ομάδα Β: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 3. Αυτοί αναλαμβάνουν το πότισμα των δένδρων του σχολείου.

Ομάδα Γ: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 5. Αυτοί αναλαμβάνουν τη φύτευση καλλωπιστικών φυτών.

Ομάδα Δ: Περιλαμβάνει τους μαθητές με αριθμό καταλόγου πολλαπλάσιο του 6. Αυτοί αναλαμβάνουν το βάνισμο των διαδρόμων του σχολικού κτιρίου.

- α) Πόσοι μαθητές ανήκουν σε κάθε ομάδα; **Μονάδες 2**
- β) Υπάρχουν μαθητές που θα κάνουν περισσότερες από μία εργασίες; **Μονάδες 1**
- γ) Πόσοι μαθητές συμμετέχουν ταυτόχρονα στις ομάδες Γ και Δ; **Μονάδες 1**
- δ) Υπάρχουν μαθητές που δεν συμμετέχουν σε καμία ομάδα εργασίας και αν ναι, πόσοι είναι; **Μονάδες 1**

Απάντηση:

α) Ομάδα Α: 25 (50:2), Ομάδα Β: 16 (48:3), Ομάδα Γ: 10 (50:5), Ομάδα Δ: 8 (48:6)

β) Ναι, επειδή α) το άθροισμα των μελών όλων των ομάδων ξεπερνά το 50, ή β) τα πολλαπλάσια του 6 είναι πολλαπλάσια και του 3 ή γ) υπάρχουν κοινά πολλαπλάσια π.χ. του 3 και 5

γ) Ένας μαθητής, αυτός με αριθμό καταλόγου 30 (κοινό πολλαπλάσιο του 5 και 6)

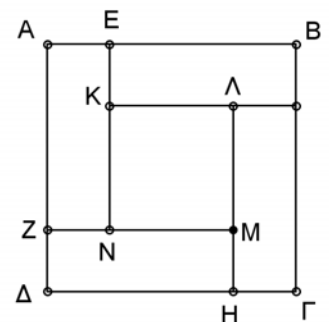
δ) Ναι. Είναι 14. Αυτοί είναι όλοι οι πρώτοι που περιέχονται στους αριθμούς από 1 έως 50 (1,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47) και το 49 που δεν είναι πολλαπλάσιο των 2,3,5,6.

ΘΕΜΑ 2ο

α) Στο εξωτερικό ενός τετραγώνου ΚΛΜΝ τοποθετούμε τέσσερα ίσα ορθογώνια έτσι ώστε να δημιουργηθεί το μεγάλο τετράγωνο ΑΒΓΔ. (Βλέπε το διπλανό σχήμα).

Αν το κάθε ορθογώνιο έχει περίμετρο 40 εκ. να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Μονάδες 2



β) Ένας υπάλληλος ξοδεύει κάθε μήνα τα $\frac{7}{10}$ του μισθού του. Αν ελαττωθεί ο μισθός του κατά το $\frac{1}{15}$ να βρείτε ποιο μέρος του νέου μισθού πρέπει να ξοδεύει ώστε να διατηρήσει την ίδια ποιότητα ζωής, δηλαδή να ξοδεύει κάθε μήνα όσα ξόδευε και πριν τη μείωση. **Μονάδες 3**

Απάντηση:

α) Έστω $AE=x$, $AZ=y$. $\Pi_{\text{ορθ}}=2x+2y$. Τότε $40=2x+2y$, άρα $20=x+y$

Επομένως για το τετράγωνο ΑΒΓΔ ισχύει ότι $AB=x+y=20$

Τότε για το εμβαδόν του ΑΒΓΔ έχουμε: $E=(AB)^2=(x+y)^2=20^2=400$ τ.εκ

β) Έστω ότι ο μισθός του είναι X ευρώ. Ο υπάλληλος λοιπόν ξοδεύει $\frac{7}{10}X$ ευρώ.

Ο νέος μισθός του είναι $X - \frac{1}{15}X = \frac{14}{15}X$ ευρώ. Αν το μέρος που ζητάμε είναι λ , τότε ισχύει ότι:

$$\lambda \cdot \frac{14}{15}X = \frac{7}{10}X, \text{ άρα } \lambda = \frac{7}{10} \cdot \frac{15}{14}, \text{ δηλ. } \lambda = \frac{3}{4}$$

ΘΕΜΑ 3ο

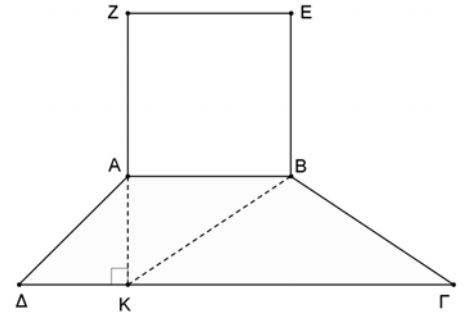
Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο και το ΑΒΕΖ τετράγωνο. Αν η περίμετρος του τετραγώνου ΑΒΕΖ είναι 20 μέτρα, η μεγάλη βάση ΓΔ του τραpezίου είναι διπλάσια από τη μικρή βάση ΑΒ, το ύψος του

$AK = \frac{1}{5} \Delta\Gamma$ και το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ισοσκελές τότε :

α) να βρείτε το εμβαδό του τραpezίου ΑΒΓΔ **Μονάδες 2**

β) να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΒΚΓ **Μονάδες 1**

γ) πόσα χρήματα θα ξοδέψουμε για να σπείρουμε με γκαζόν ένα οικόπεδο που έχει ακριβώς το σχήμα του τραpezίου ΑΒΓΔ αν για κάθε 1 τετραγωνικό μέτρο χρειάζονται 500 γραμμάρια σπόρου και το 1 κιλό σπόρου κοστίζει 20,14 €; **Μονάδες 2**



Απάντηση

$\Pi_{ABEZ} = 20$, άρα $AB=20:4 = 5$ μέτρα. $\Gamma\Delta=2 \cdot AB=2 \cdot 5=10$ μέτρα $AK = \frac{1}{5} \Delta\Gamma = AK = \frac{1}{5} \cdot 10=2$ μέτρα $\Delta\Delta\Delta$ ισοσκελές, άρα $\Delta K=AK=2$ μέτρα. Επομένως $K\Gamma=\Delta\Gamma-\Delta K = 10 - 2=8$ μέτρα

α) $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{1}{2} (AB+\Gamma\Delta) \cdot AK = \frac{1}{2} (5+10) \cdot 2 = 15$ τετραγωνικά μέτρα.

β) $E_{B\Delta\Gamma} = \frac{1}{2} K\Gamma \cdot AK = \frac{1}{2} 8 \cdot 2 = 8$ τετραγωνικά μέτρα.

γ) Χρειαζόμαστε $15 \cdot 500 = 7500$ γραμμάρια σπόρων, δηλ. 7,5 κιλά, επομένως $7,5 \cdot 20,14 = 151,05$ ευρώ

ΘΕΜΑ 4ο

Γράφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 1000 σε μια σειρά και δημιουργούμε τον πολυψήφιο αριθμό $X=12345678910111213141516...9991000$

α) Πόσα ψηφία χρησιμοποιήσαμε μέχρι να γράψουμε και τον αριθμό 100; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. **Μονάδες 2**

β) Ποιο ψηφίο του αριθμού X βρίσκεται στην 2014^η θέση; **Μονάδες 3**

Απάντηση

α) Από το 1 έως το 10 χρησιμοποιούμε: 11 ψηφία (πρώτη δεκάδα) ,

από το 11 έως το 20 χρησιμοποιούμε: $2 \cdot 10$ αριθμοί = 20 ψηφία (δεύτερη δεκάδα),

κτλ, από 91 έως 100: $2 \cdot 10 + 1 = 20 + 1 = 21$ ψηφία (δέκατη δεκάδα)

Άρα τα συνολικά ψηφία έως και τον αριθμό 100 είναι: $11 + 9 \cdot 20 + 1 = 11 + 180 + 1 = 192$

β) Λόγω (α) ερωτ. στην 192^η θέση βρίσκεται το ψηφίο 0 (πρώτη εκατοντάδα).

Χωρίζουμε τώρα τους αριθμούς σε εκατοντάδες αρχίζοντας από το 101

Από το 101 έως το 200 υπάρχουν: 3 ψηφία • 100 αριθμοί = 300 ψηφία (δεύτερη εκατοντάδα)

Από το 201 έως το 300 υπάρχουν: 3•100=300 ψηφία (Τρίτη εκατοντάδα)

κτλ. από το 601 έως 700 υπάρχουν: 3•100=300 ψηφία (Εβδομη εκατοντάδα)

Θα αθροίσουμε τα ψηφία ώστε να βρούμε αποτέλεσμα 2014:

$$192 + 6 \cdot 300 = 192 + 1800 = 1992$$

$$2014 - 1992 = 22 \text{ ακόμη ψηφία}$$

7 ακόμη αριθμοί • 3 ψηφία = 21 ψηφία και θέλουμε άλλο 1 ψηφίο, δηλ. έως το 707 έχουμε γράψει 2013 ψηφία και θέλουμε άλλο 1 ψηφίο, δηλ. από το 708 επιλέγουμε το 7.

Άρα στη 2014^η θέση βρίσκεται το 7