

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΗΜΑΘΙΑΣ

5^{ος} Ημαθιώτικος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά

«Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ»



Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2013

Α' Γυμνασίου

Απαντήσεις

Θέμα 1^ο

Ένας αριθμός αποτελείται από 4025 ψηφία από τα οποία τα 2012 είναι τριάρια και 2013 είναι δυάρια με τυχαία σειρά (ανακατωμένα μεταξύ τους).

α) Εξηγήστε γιατί ο αριθμός διαιρείται δια 9.

Μονάδες 3

β) Ποια πρέπει να είναι τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού ώστε ο αριθμός να διαιρείται δια 4;

Μονάδες 2

Λύση

α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο διαιρετότητας του 9:

«ένας αριθμός διαιρείται με το 9 αν και μόνο αν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το 9».

Αρκεί δηλαδή να υπολογίσουμε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού. Πράγματι αυτό είναι:

$$3 \cdot 2012 + 2 \cdot 2013 = 6036 + 4026 = 10.062$$

Ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 9 διότι το άθροισμα των ψηφίων του είναι $1+0+0+6+2=9$ άρα και ο αρχικός αριθμός διαιρείται με το 9.

β) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο διαιρετότητας του 4:

«ένας αριθμός διαιρείται με το 4 αν και μόνο αν το τελευταίο διψήφιο τμήμα του διαιρείται με το 4».

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τους διψήφιους αριθμούς που αποτελούνται από τα ψηφία 2 και 3 και διαιρούνται δια 4. Όλοι οι διψήφιοι αριθμοί με ψηφία 2 και 3 είναι οι 22, 23, 32, 33. Ο μόνος που διαιρείται με το 4 είναι ο 32. Άρα, **τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού είναι τα 3 και 2.**

Θέμα 2^ο

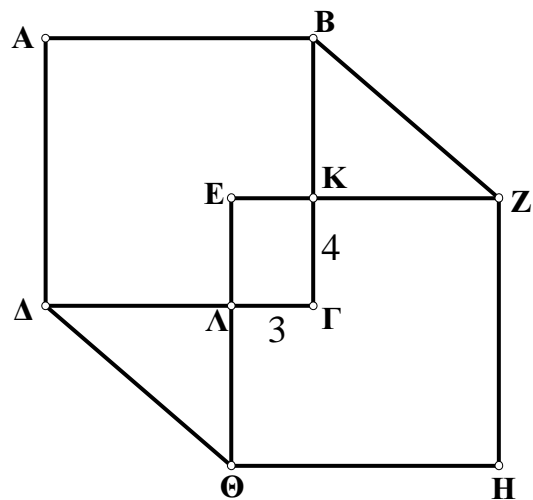
Δύο ίσα τετράγωνα $ΑΒΓΔ$ και $ΕΖΗΘ$ με πλευρά 10cm το καθένα, έχουν κοινό το ορθογώνιο $ΕΚΓΛ$ με διαστάσεις 3cm και 4cm όπως δείχνει το σχήμα.

α) Υπολογίστε τα μήκη των καθέτων πλευρών των δύο ορθογωνίων τριγώνων $ΒΚΖ$ και $ΔΛΘ$.

Μονάδες 1

β) Υπολογίστε το εμβαδόν του εξαγώνου $ΑΒΖΗΘΔ$

Μονάδες 4



Λύση

α) Είναι $BK = BG - KG = 10 - 4 = 6\text{cm}$, $KZ = EZ - EK = 10 - 3 = 7\text{cm}$,
 $ΔΛ = ΓΔ - ΓΛ = 10 - 3 = 7\text{cm}$, $ΛΘ = ΕΘ - ΕΛ = 10 - 4 = 6\text{cm}$.

β) Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του εξαγώνου το χωρίζουμε σε επιμέρους σχήματα των οποίων τα εμβαδά μπορούμε να υπολογίσουμε. Επειδή τα δύο τετράγωνα έχουν κοινό το ορθογώνιο $ΕΚΓΛ$, το συνολικό εμβαδόν που καλύπτουν και τα δύο μαζί είναι

$$E_{ΑΒΓΔ} + E_{ΕΖΗΘ} - E_{ΕΚΓΛ} = 10^2 + 10^2 - 3 \cdot 4 = 100 + 100 - 12 = 188 \text{ cm}^2$$

Ενώ τα εμβαδά των τριγώνων είναι:

$$E_{ΒΚΖ} = \frac{KZ \cdot BK}{2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 \text{ cm}^2 \quad \text{και}$$

$$E_{ΔΛΘ} = \frac{ΔΛ \cdot ΛΘ}{2} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21 \text{ cm}^2$$

Άρα το εμβαδόν του εξαγώνου είναι

$$188 + 21 + 21 = 230 \text{ cm}^2.$$

Θέμα 3^ο

Ένας μαθητής της Α΄ Γυμνασίου για να πάρει μέρος στο διαγωνισμό ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ που διεξάγεται φέτος και για τους μαθητές του Νομού Φλώρινας, ξεκίνησε οδικώς από τη Βέροια για να πάει στο Αμύνταιο του Νομού Φλώρινας περνώντας από τον Πολύμυλο και κατόπιν από την Πτολεμαΐδα.

Όταν έφτασε στον Πολύμυλο παρατήρησε ότι πρέπει να διανύσει ακόμη 42 χιλιόμετρα για να

φτάσει στην Πτολεμαΐδα η οποία βρίσκεται στα $\frac{3}{4}$ της απόστασης Βέροιας – Αμυνταίου, ενώ αν διανύσει 34 χιλιόμετρα μετά τον Πολύμυλο θα έχει κάνει τα $\frac{2}{3}$ της διαδρομής Βέροιας – Αμυνταίου.

Να βρεθούν οι αποστάσεις:

α) Βέροιας – Αμυνταίου

β) Πτολεμαΐδας – Αμυνταίου

γ) Βέροιας - Πολυμύλου

Μονάδες 3

Μονάδες 1

Μονάδες 1

Λύση

α) Έστω Α το σημείο στο οποίο θα έχει διανύσει τα $\frac{2}{3}$ της διαδρομής. Τότε η απόσταση από το Α

μέχρι την Πτολεμαΐδα είναι $42 - 34 = 8$ χιλιόμετρα, που αντιστοιχεί στα $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ της συνολικής

διαδρομής. Αφού λοιπόν το $\frac{1}{12}$ της διαδρομής είναι 8 χιλιόμετρα, η ολόκληρη διαδρομή, δηλαδή η

απόσταση Βέροιας – Αμυνταίου είναι $12 \cdot 8 = 96$ χιλιόμετρα.

β) Επειδή η απόσταση Βέροιας – Πτολεμαΐδας είναι τα $\frac{3}{4}$ της συνολικής απόστασης, η απόσταση Πτολεμαΐδας – Αμυνταίου είναι το $\frac{1}{4}$ της συνολικής απόστασης. Άρα η απόσταση της Πτολεμαΐδας από το Αμύνταιο είναι $96 : 4 = 24$ χιλιόμετρα.

γ) Η απόσταση Πολυμύλου – Πτολεμαΐδας είναι 42 χιλιόμετρα (από την υπόθεση του προβλήματος) ενώ η απόσταση Πτολεμαΐδας – Αμυνταίου είναι 24 χιλιόμετρα. Άρα η απόσταση Πολυμύλου – Αμυνταίου είναι $42 + 24 = 66$ χιλιόμετρα. Συνεπώς, η απόσταση Βέροιας – Πολυμύλου είναι $96 - 66 = 30$ χιλιόμετρα.

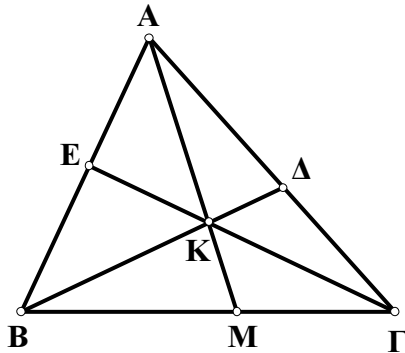


Θέμα 4^ο

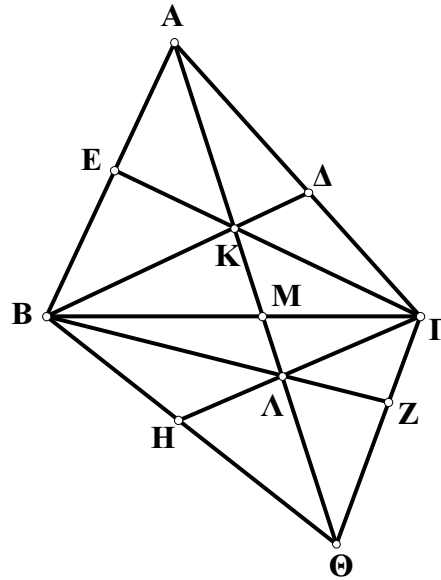
α) Να ονομάσετε τα 16 τρίγωνα όλων των μεγεθών που υπάρχουν στο σχήμα 1. **Μονάδες 2**

β) Χρησιμοποιείστε το (α) ερώτημα ή όποιον άλλο τρόπο θέλετε για να βρείτε πόσα τρίγωνα όλων των μεγεθών υπάρχουν στο σχήμα 2 και δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Δεν είναι υποχρεωτικό να ονομάσετε όλα τα τρίγωνα του (β) ερωτήματος). **Μονάδες 3**



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Λύση

α) Τα 16 τρίγωνα είναι:

ΑΒΓ, ΑΒΜ, ΑΒΔ, ΑΒΚ, ΑΕΚ, ΑΕΓ, ΑΔΚ, ΑΓΚ,
ΑΓΜ, ΒΓΕ, ΒΓΔ, ΒΓΚ, ΒΚΕ, ΒΜΚ, ΓΚΜ, ΓΚΔ

β) Το σχήμα 2 αποτελείται από δύο τρίγωνα της μορφής του πρώτου σχήματος (ΑΒΓ και ΒΓΘ). Το κάθε ένα από αυτά περιέχει 16 τρίγωνα (από το ερώτημα (α)). Πρέπει να μετρήσουμε τα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές είναι άλλες στο τρίγωνο ΑΒΓ και άλλες στο ΒΓΘ. Αυτά είναι τα ΑΒΘ, ΑΒΔ, ΑΓΘ, ΑΓΔ, ΚΒΔ, ΚΓΔ, ΚΒΘ, ΚΓΘ. Έτσι, ο συνολικός αριθμός τριγώνων είναι $16 \cdot 2 + 8 = 40$.