ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλους τους πενταψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\beta 0\gamma\delta} = \alpha\cdot 10^4 + \beta\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + \gamma\cdot 10 + \delta,$$

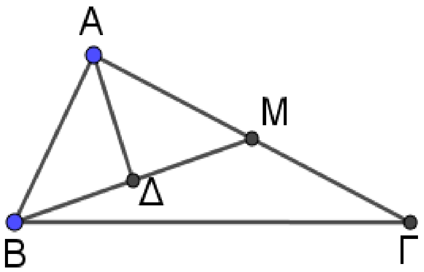
όπου $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ψηφία με $0<\alpha<\beta<\gamma<\delta$, οι οποίοι είναι κοινά πολλαπλάσια του 9 και του 4.

Πρόβλημα 2

Ο Γιάννης και η Μαρία όταν βγήκαν για μία βόλτα είχαν μαζί τους και οι δύο συνολικά 600 ευρώ και ξόδεψαν και οι δύο μαζί 80 ευρώ. Αν ο Γιάννης ξόδεψε το $\frac{100}{9}\%$ των χρημάτων του και η Μαρία ξόδεψε το $\frac{100}{7}\%$ των χρημάτων της, να βρείτε πόσα χρήματα είχε ο καθένας τους.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές $\mathrm{AB} = \alpha\ cm$ και $\mathrm{A\Gamma} = 2\alpha\ cm$. Το εμβαδόν του τρίγωνου ΑΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ και το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΜ.



(α) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΜ.

(β) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τετραγώνων με πλευρές τις ΑΔ και ΒΜ, αντίστοιχα.

Πρόβλημα 4

Ο Γιώργος έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Γιώργου ήταν 2020. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Γιώργος στο τετράδιο του.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες   ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***

Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και ικανοποιούν τις ισότητες

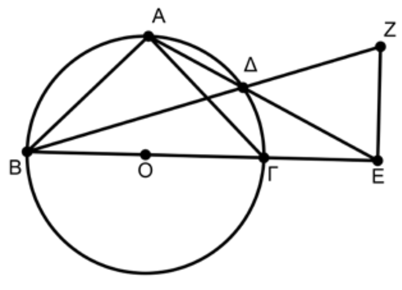
$$\alpha + 9 = (\beta - 3)^2 \qquad \text{και} \qquad \beta + 9 = (\alpha - 3)^2 ,$$

να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\alpha^2 + \beta^2$.

Πρόβλημα 2
Ο Δημήτρης έγραψε έναν τετραψήφιο αριθμό στο τετράδιο του, αλλά η αδελφή του έσβησε το τελευταίο ψηφίο του. Τότε προέκυψε τριψήφιος αριθμός του οποίου η διαφορά από τον αρχικό αριθμό του Δημήτρη ήταν 2019. Να προσδιορίσετε τον αριθμό που έγραψε ο Δημήτρης στο τετράδιο του.

Πρόβλημα 3.
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha - 1$ είναι πολλαπλάσιο του β,
(ii) ο $\beta - 1$ είναι πολλαπλάσιο του γ,
(iii) ο $\gamma - 1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Πρόβλημα 4
Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι το σημείο Α είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και Δ τυχόν σημείο του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Η ευθεία ΑΔ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ε και $\Gamma\hat{E}Z = 90^0$.



(α) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $E\hat{\Delta}Z$
(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma E = EZ$.
Σημείωση: *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
18 Ιανουαρίου 2020

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με άθροισμα $\alpha+\beta=1$ είναι τέτοιοι ώστε $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=x,\ x\geq 2,$ να προσδιορίσετε την τιμή του x έτσι ώστε να ισχύει:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}=\frac{13}{6}.$$

Πρόβλημα 2
Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, ω με $x-2y+\omega>0$, $2x-y+\omega>0$ ισχύουν:

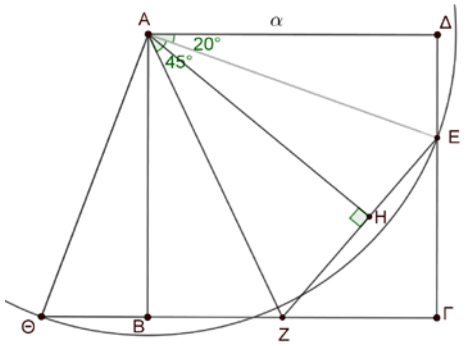
$$x-2y+\omega+\frac{1}{x-2y+\omega}\leq 2 \qquad (1)$$

$$2x-y+\omega+\frac{1}{2x-y+\omega}\leq 2, \qquad (2)$$

να αποδείξετε ότι: $2020(x+y)^{2021}+\omega^2-2\omega\geq -1.$

Πρόβλημα 3
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β, γ που είναι μεγαλύτεροι του 1 και ικανοποιούν όλες τις παρακάτω συνθήκες:
(i) ο $2\alpha-1$ είναι πολλαπλάσιο του β, (ii) ο $2\beta-1$ είναι πολλαπλάσιο του γ και
(iii) ο $\gamma-1$ είναι πολλαπλάσιο του α.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Θεωρούμε σημείο Ε πάνω στην πλευρά ΓΔ και σημείο Ζ πάνω στην πλευρά ΒΓ έτσι ώστε $\Delta\hat{A}E=20^0$ και $E\hat{A}Z=45^0$. Ο κύκλος γ κέντρου Α και ακτίνας ΑΕ τέμνει την προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Β σε σημείο Θ έτσι ώστε το Β να βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ζ και Θ. Φέρουμε και το ύψος ΑΗ του τριγώνου ΑΖΕ. Να αποδείξετε ότι $Z\Theta=ZE$ και να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΗ συναρτήσει του α. ***Σημείωση:*** *Να κάνετε στο φύλλο των απαντήσεων σας το δικό σας σχήμα.*



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της πραγματικής παραμέτρου $\lambda \neq 0$, για τις οποίες η εξίσωση

$$\frac{1}{\lambda(x+3)}+\frac{6\lambda-3}{x(3-x)(x+3)}=\frac{1}{x(3-x)}$$

έχει δυο λύσεις x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους που ικανοποιούν τη σχέση: $|x_1-x_2|=7$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x,y)=x^7+x^6y+x^5y^2+x^4y^3+x^3y^4+x^2y^5+xy^6+y^7,\ x,y\in\mathbb{R}.$$

(α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x,y)$ ως γινόμενο πολυωνύμων βαθμού το πολύ 2.

(β) Αν $xy=1,\ x,y>0$, να προσδιορίσετε την ελάχιστη δυνατή αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x,y)$ και τις τιμές των x,y για τις οποίες λαμβάνεται.

Πρόβλημα 3

Ο Γιάννης διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για το μέσον όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.
- Από τις 11 μέχρι και τις 25 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 16 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.
(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 16 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 20, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $\hat{A}=45°$. Ο κύκλος $c_1(Γ, ΑΓ)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο $Δ$. Ο κύκλος $c_2(Δ, ΓΔ)$ τέμνει (για δεύτερη φορά) τον κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E. Αν η $ΓΔ$ τέμνει την AB στο Z, να αποδείξετε ότι τα σημεία B, O, E είναι συνευθειακά και ότι η OZ είναι παράλληλη στην $ΔE$.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
18 Ιανουαρίου 2020

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $a_n,\ n=1,2,3,....$ είναι τέτοια ώστε η ακολουθία των μέσων όρων $M_n=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n},\ n=1,2,3,...$ να ικανοποιεί την ισότητα

$$M_{n+1}=\frac{M_n+M_{n+2}}{2},\ \text{για κάθε } n=1,2,3,...$$

Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $a_n,\ n=1,2,3,....$ είναι αριθμητική πρόοδος.

Πρόβλημα 2
Η Μαρία διάβασε τον περασμένο Νοέμβρη ένα πολυσέλιδο λογοτεχνικό βιβλίο. Κρατούσε σημειώσεις για το πόσες νέες σελίδες διάβαζε κάθε μέρα και μας έδωσε τα εξής στοιχεία για τον μέσο όρο των νέων σελίδων που διάβαζε στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:

- Από τις 1 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 10.
- Από τις 6 μέχρι και τις 20 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 20.
- Από τις 11 μέχρι και τις 30 του Νοέμβρη ο μέσος όρος ήταν 30.

(α) Να προσδιορίσετε τον μέγιστο και τον ελάχιστο δυνατό αριθμό σελίδων του βιβλίου.
(β) Αν δίνεται επιπλέον ότι από τις 11 μέχρι και τις 15 του Νοέμβρη ο μέσος όρος των νέων σελίδων που διάβασε ήταν 10, να βρείτε πόσες ακριβώς σελίδες είχε το βιβλίο.

Πρόβλημα 3. Να προσδιορίσετε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν την ισότητα

$$P(x^2)=\left(P(x)\right)^2-2P(x)+2,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ με $AB<A\Gamma<B\Gamma$ και έστω c_1 ο κύκλος που το κέντρο του Δ βρίσκεται επάνω στην $B\Gamma$ και περνά από τα σημεία B,O. Ο κύκλος c_1 τέμνει την AB στο σημείο E και τον κύκλο c στο σημείο Z. Αν τέλος ο περιγεγραμμένος κύκλος $c_2(O,\Delta,E)$ του τριγώνου $O\Delta E$, τέμνει την AB στο σημείο K, να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ,Δ,Z,O βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο ο οποίος εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου AOK.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες***
Καλή επιτυχία!