



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
**75<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”**  
**17 Ιανουαρίου 2015**  
**Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1.**

Υπολογίστε την τιμή της παράστασης:  $A = \left(\frac{7}{3} - \frac{49}{9}\right) \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{3} + \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right)^{-2} : \left(2 - \frac{11}{10}\right)^{-2}$ .

**Πρόβλημα 2.** Μία οικογένεια αγόρασε ένα ψυγείο με έκπτωση  $11\frac{1}{9}\%$  πάνω στην τιμή πώλησης και ένα πλυντήριο με έκπτωση  $14\frac{2}{7}\%$  πάνω στην τιμή πώλησης. Η συνολική τιμή πώλησης ψυγείου και πλυντηρίου ήταν 3150 ευρώ. Η συνολική έκπτωση που έγινε ήταν 390 ευρώ. Να βρείτε την τιμή πώλησης του ψυγείου και του πλυντηρίου.

**Σημείωση:** Οι αριθμοί  $11\frac{1}{9}$  και  $14\frac{2}{7}$  είναι μεικτοί.

**Πρόβλημα 3.**

Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ και Δ πλήρωσαν πέρυσι για τη μεταφορά των μαθητών τους στο Γυμνάσιο του Δήμου τους συνολικά 9690 ευρώ. Τα χρήματα που πλήρωσε κάθε χωριό ήταν ανάλογα προς τον αριθμό των μαθητών του χωριού που φοιτούσαν στο Γυμνάσιο. Να βρείτε πόσα χρήματα πλήρωσε κάθε χωριό, αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός των μαθητών του χωριού Β ισούται με τα  $\frac{3}{4}$  του αριθμού των μαθητών του χωριού Γ, ο αριθμός των μαθητών του χωριού Α ισούται με τα  $\frac{2}{3}$  του αριθμού των μαθητών του χωριού Β και ο αριθμός των μαθητών του χωριού Δ ισούται με το άθροισμα των μαθητών των χωριών Α και Γ.

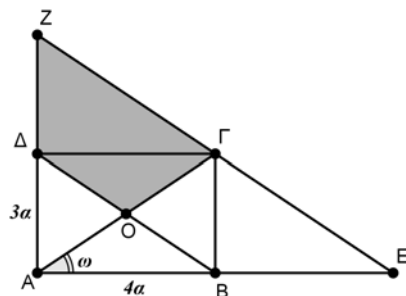
**Πρόβλημα 4**

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με  $\hat{\Gamma A B} = \omega$  και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε και την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ζ. Δίνεται ότι:

$$A B = 4 a \text{ cm} , A \Delta = 3 a \text{ cm} .$$

1. Βρείτε τη γωνία  $\hat{A} \hat{\Gamma} Z$  συναρτήσει της γωνίας  $\omega$ .
2. Αποδείξτε ότι:  $A \Gamma = \Gamma Z = \Gamma E$ .
3. Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου ΔΟΓΖ.

**Σημείωση.** Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.



Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
 Καλή επιτυχία.

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
75<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
17 Ιανουαρίου 2015

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , όπου  $a, b, c$  πραγματικοί αριθμοί.

(α) Βρείτε το πολυώνυμο:  $Q(x) = P(2x) - 19P(-x)$ .

(β) Βρείτε το πολυώνυμο  $P(x)$ , αν ισχύει ότι:  $Q(x) = 3x(3x+2)^2$ .

**Πρόβλημα 2**

Οι πραγματικοί αριθμοί  $a, b$  είναι τέτοιοι ώστε  $ab(a+b)(a-b) \neq 0$  και

$$\frac{b(a-b)}{a(a+b)} + \frac{b(a+b)}{a(a-b)} = \frac{3ab-b^2}{a^2-b^2}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι:  $a^2 = b(a+2b)$

(β) Να βρείτε την τιμή του λόγου  $\frac{a}{b}$ .

**Πρόβλημα 3**

Ο τριψήφιος θετικός ακέραιος  $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$  όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 43 και υπόλοιπο 9. Επίσης ο αριθμός  $\overline{zyx} = 100z + 10y + x$  όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 30 και υπόλοιπο 6. Να βρεθεί ο αριθμός  $\overline{xyz}$ .

**Πρόβλημα 4**

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ, \hat{\Gamma} = 60^\circ$  και υποτείνουσα  $B\Gamma = \alpha$ . Η μεσοκάθετη στο μέσον  $M$  της  $B\Gamma$  τέμνει τη διχοτόμο  $B\Delta$  (το  $\Delta$  είναι σημείο της  $A\Gamma$ ) στο σημείο  $K$  και την ευθεία  $A\Gamma$  στο σημείο  $N$ . Έστω  $\Lambda$  είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $K\Delta$ .

1. Να αποδείξετε ότι:  $N\Lambda \perp B\Delta$ .

2. Θεωρούμε τον κύκλο  $\omega$  με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα  $BN$ , ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία  $A, \Lambda$  και  $M$ . Έστω  $E$  το χωρίο που έχει πλευρές τις  $M\Gamma$ ,  $A\Gamma$  και το τόξο  $\overset{\frown}{AM}$  του κύκλου  $\omega$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $E$  συναρτήσει της πλευράς  $B\Gamma = \alpha$ .

**Σημείωση:** Το χωρίο  $E$  είναι στο εσωτερικό του τριγώνου  $AB\Gamma$  και εξωτερικά του κύκλου  $\omega$ .

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ  
75<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ  
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”  
17 Ιανουαρίου 2014  
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Πρόβλημα 1**

Δίνεται η παράσταση:  $A = \frac{\alpha^2 - 1}{n^2 + \alpha n} \cdot \left( \frac{n^2}{n-1} - n \right) \cdot \frac{\alpha + n - \alpha n^3 - n^4}{1 - \alpha^2}$ , με  $\alpha$  πραγματικό

αριθμό μεγαλύτερο του 1 και  $n$  θετικό ακέραιο,  $n > 1$ . Να αποδείξετε ότι:

(α)  $A = n^2 + n + 1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο  $A$  να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

**Πρόβλημα 2**

Στις εξετάσεις του Α. Σ. Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

**Πρόβλημα 3**

Θερούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε  $AB = BD = \Gamma\Delta$ . Φέρουμε το ύψος του ΔΕ, όπου Ε σημείο της πλευράς ΑΒ. Έστω Ζ το συμμετρικό της κορυφής Α ως προς κέντρο το σημείο Ε. Έστω επίσης Κ το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Ζ και Λ το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς κέντρο το σημείο Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

**Πρόβλημα 4**

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος  $\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w$  όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός  $\overline{wzyc} = 1000w + 100z + 10y + x$  όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός  $\overline{xyzw}$ .

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία*

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**75<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”**  
**17 Ιανουαρίου 2015**

**Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1**

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-1} = 3.$$

**Πρόβλημα 2**

Έστω  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$  θετικοί ακέραιοι που είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Δίνεται επίσης ότι το άθροισμά τους είναι τέλειος κύβος και το άθροισμα των 5 μεσαίων όρων  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ , είναι τέλειο τετράγωνο. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του όρου  $\alpha_4$ .

**Πρόβλημα 3**

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $ABCD$  τέτοιο ώστε  $AB = BD = CD$  και με τη γωνία  $\hat{A} = 75^\circ$ . Φέρουμε το ύψος του  $DE$ , όπου  $E$  σημείο της πλευράς  $AB$ . Έστω  $Z$  το συμμετρικό της κορυφής  $A$  ως προς κέντρο το σημείο  $E$ . Έστω επίσης  $K$  το συμμετρικό της κορυφής  $C$  ως προς κέντρο το σημείο  $Z$  και  $L$  το συμμετρικό της κορυφής  $B$  ως προς κέντρο το σημείο  $A$ . Να βρείτε το μέτρο της γωνίας  $\hat{KDL}$ .

**Πρόβλημα 4**

Θεωρούμε το τριώνυμο  $f(x) = 4x^2 + kx + m$  και υποθέτουμε ότι οι ρίζες του είναι διακεκριμένες και ανήκουν στο διάστημα  $(0,1)$ . Να αποδειχθεί ότι τουλάχιστον ένας από τους  $k, m$  δεν είναι ακέραιος.

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες*  
*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*

*Καλή επιτυχία!*

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34  
106 79 ΑΘΗΝΑ  
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr



**GREEK MATHEMATICAL SOCIETY**  
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street  
GR. 106 79 - Athens - HELLAS  
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025  
e-mail : info@hms.gr  
www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**75<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**“Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”**  
**17 Ιανουαρίου 2015**

**Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1**

Στις εξετάσεις του Α. Σ. Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι και 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 50. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 56. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 40, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 45. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

**Πρόβλημα 2**

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί  $a, b$  ικανοποιούν τη σχέση:

$$\frac{a}{b+a} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} = \frac{3}{2},$$

να αποδειχθεί ότι:  $a = b$ .

**Πρόβλημα 3**

Να βρεθεί ο μεγαλύτερος θετικός ακέραιος  $k$  με την ακόλουθη ιδιότητα: Ο αριθμός 2018 γράφεται ως άθροισμα  $k$  τετραγώνων διαφορετικών ακεραίων.

**Πρόβλημα 4**

Δίνεται τρίγωνο  $ABC$  με  $AB < AC < BC$ . Στη προέκταση της  $AB$  (προς το μέρος του  $B$ ), θεωρούμε σημείο  $K$  και στη συνέχεια θεωρούμε τον κύκλο  $c(K, KA)$  (με κέντρο το  $K$  και ακτίνα  $KA$ ). Ο κύκλος ( $c$ ) τέμνει την ευθεία  $AB$  στο σημείο  $D$  και την ευθεία  $AC$  στο σημείο  $E$ . Σε τυχόν σημείο  $M$  εσωτερικό της πλευράς  $AB$  θεωρούμε κάθετη προς την ευθεία  $AB$ , η οποία τέμνει την ευθεία  $AC$  στο σημείο  $N$ . Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $KME$  (έστω  $(c_1)$ ) τέμνει τον κύκλο ( $c$ ) στο σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $MN, DE, AZ$  περνάνε από το ίδιο σημείο (συντρέχουν).

**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες**  
**Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες**

**Καλή επιτυχία!**