

Θέματα μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$ με

$$a_1 = 2 \text{ και } a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}), \quad n \geq 2.$$

Να προσδιορίσετε τον όρο a_{2013} .

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Παρατηρούμε ότι:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{3}{1} \cdot a_1 = 3 \cdot 2, \quad a_3 = \frac{4}{2} \cdot (a_1 + a_2) = \frac{4}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \cdot 2^2,$$

$$a_4 = \frac{5}{3} \cdot (a_1 + a_2 + a_3) = \frac{5}{3} \cdot 24 = 5 \cdot 2^3, \quad a_5 = \frac{6}{4} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = \frac{6}{4} \cdot 64 = 6 \cdot 2^4.$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-1}$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \dots, k$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει το ίδιο και για $n = k+1$, δηλαδή ότι ισχύει: $a_{k+1} = (k+2) \cdot 2^k$.

Πράγματι, έχουμε

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k) = \frac{k+2}{k} \cdot (2 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \dots + (k+1) \cdot 2^{k-1})$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot (2 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 4 \cdot 2^2 + \dots + (k+1) \cdot 2^{k-1}) \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης (1) επί 2, λαμβάνουμε

$$2a_{k+1} = \frac{k+2}{k} \cdot (2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (k+1) \cdot 2^k), \quad (2)$$

οπότε με αφαίρεση της (1) από τη (2) κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{k+2}{k} \cdot (-2 - 2^1 - 2^2 - 2^3 - \dots - 2^{k-1} + (k+1) \cdot 2^k) \\ a_{k+1} &= \frac{k+2}{k} \cdot \left(-1 - \frac{1-2^k}{1-2} + (k+1) \cdot 2^k \right) \\ &= \frac{k+2}{k} \cdot (-2^k + (k+1) \cdot 2^k) = (k+2) \cdot 2^k. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε: $a_{2013} = 2014 \cdot 2^{2012}$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τις σχέσεις

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}), \quad n \geq 2, \quad (3)$$

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n}\right)(a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad n \geq 1, \quad (4)$$

από τις οποίες λαμβάνουμε

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)a_n, \quad n \geq 2 \quad (5)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left(\frac{n}{n+2} \right) a_{n+1}, \quad n \geq 1. \quad (6)$$

Με αφαίρεση της σχέσης (5) από τη σχέση (6) κατά μέλη λαμβάνουμε

$$a_n = \left(\frac{n}{n+2} \right) a_{n+1} - \left(\frac{n-1}{n+1} \right) a_n \Rightarrow a_{n+1} = \left(\frac{2(n+2)}{n+1} \right) a_n, \quad n \geq 1 \quad (7)$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{2(n+1)}{n} \right) a_{n-1} = \left(\frac{2(n+1)}{n} \right) \left(\frac{2n}{n-1} \right) a_{n-2} = \dots \\ &= \left(\frac{2(n+1)}{n} \right) \left(\frac{2n}{n-1} \right) \dots \left(\frac{2 \cdot 4}{3} \right) \cdot \left(\frac{2 \cdot 3}{2} \right) a_1 = (n+1) \cdot 2^{n-2} \cdot a_1 = (n+1) \cdot 2^{n-1}, \end{aligned}$$

αφού είναι $a_1 = 2$. Άρα έχουμε $a_{2013} = 2014 \cdot 2^{2012}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο σύνολο των ακεραίων να λύσετε την εξίσωση:

$$y = 2x^2 + 5xy + 3y^2.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y = 2x^2 + 2xy + 3xy + 3y^2 \Leftrightarrow y = (x+y)(2x+3y). \quad (1)$$

Αν θέσουμε $x+y=z$, τότε πρέπει $z \in \mathbb{Z}$ και η εξίσωση (1) γίνεται

$$y = z(2z+y) \Leftrightarrow y = 2z^2 + yz \Leftrightarrow (z-1)y = -2z^2. \quad (2)$$

Για $z=1$ η εξίσωση (2) γίνεται $0 \cdot y = -2$ (αδύνατη).

Για $z \neq 1$ η εξίσωση γίνεται

$$y = -\frac{2z^2}{z-1} = -\frac{2(z^2-1)+2}{z-1} = -2(z+1) - \frac{2}{z-1}. \quad (3)$$

Για να είναι ο y ακέραιος πρέπει ο $z-1$ να είναι διαιρέτης του 2, δηλαδή πρέπει

$$z-1 \in \{-1, 1, -2, 2\} \Leftrightarrow z \in \{0, 2, -1, 3\}.$$

- Για $z=0$, λαμβάνουμε τη λύση $(x, y) = (0, 0)$.
- Για $z=2$, λαμβάνουμε τη λύση $(x, y) = (10, -8)$.
- Για $z=-1$, λαμβάνουμε τη λύση $(x, y) = (-2, 1)$.
- Για $z=3$, λαμβάνουμε τη λύση $(x, y) = (12, -9)$.

2^{ος} τρόπος

Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$y = 2x^2 + 2xy + 3xy + 3y^2 \Leftrightarrow (x+y-1)(2x+3y+2) = -2 \quad (4)$$

Επειδή ζητάμε λύσεις στους ακέραιους, οι δύο παράγοντες στο πρώτο μέρος πρέπει να είναι ακέραιοι, οπότε από την εξίσωση (4) έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\begin{cases} x+y-1=-1 \\ 2x+3y+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

- $\begin{cases} x+y-1=1 \\ 2x+3y+2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(10,-8)$
- $\begin{cases} x+y-1=2 \\ 2x+3y+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(12,-9)$
- $\begin{cases} x+y-1=-2 \\ 2x+3y+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(-2,1)$

3^{ος} τρόπος

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$2x^2 + 5yx + 3y^2 - y = 0, \quad (5)$$

δηλαδή είναι δευτεροβάθμια ως προς x με ακέραιους συντελεστές. Για να έχει η εξίσωση αυτή ακέραιες λύσεις **πρέπει** η διακρίνουσά της να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, δηλαδή πρέπει $\Delta = y^2 + 8y = y(y+8) = \rho^2$, όπου ρ ακέραιος.

- Αν είναι $\rho = 0$, τότε θα είναι $\Delta = 0$ και $y = 0$ ή $y = -8$. Για $y = 0$, από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι $x = 0$, δηλαδή είναι $(x,y) = (0,0)$. Για $y = -8$, από την εξίσωση (4) προκύπτει ότι $x = 10$, οπότε έχουμε τη λύση $(x,y) = (10,-8)$.
- Αν είναι $\rho \neq 0$, τότε **πρέπει** η εξίσωση

$$y^2 + 8y - \rho^2 = 0, \quad (6)$$

να έχει ακέραιες λύσεις ως προς y για κατάλληλες τιμές του ρ . Άρα, πρέπει η διακρίνουσα της εξίσωσης (6) να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου. Άρα πρέπει να είναι $\Delta' = 64 + 4\rho^2 = 8^2 + (2\rho)^2 = w^2$, οπότε η τριάδα $(8, 2\rho, w)$ πρέπει να είναι μία Πυθαγόρεια τριάδα. Όμως όλες οι Πυθαγόρειες τριάδες είναι της μορφής

$(k \cdot (m^2 - n^2), k \cdot 2mn, k \cdot (m^2 + n^2))$, όπου k, m, n θετικοί ακέραιοι, $m > n$. Άρα οι δυνατές περιπτώσεις είναι:

$$k \cdot (m^2 - n^2) = 8, k \cdot 2mn = 2\rho \quad (7)$$

$$\text{ή } k \cdot 2mn = 8, k \cdot (m^2 - n^2) = 2\rho. \quad (8)$$

Για $k=1$ η σχέση (7) μπορεί να αληθεύει με $(m,n)=(3,1)$, οπότε $\rho=3$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται $y^2 + 8y - 9 = 0 \Leftrightarrow y=1$ ή $y=-9$, δηλαδή έχει ακέραιες λύσεις. Από την εξίσωση (5) λαμβάνουμε τις λύσεις $x=-2$, για $y=1$ και $x=12$, για $y=-9$, οπότε έχουμε τις λύσεις: $(x,y)=(-2,1)$ και $(x,y)=(12,-9)$. Για $k \geq 2$, από το σύστημα (7) δεν προκύπτει ακέραια τιμή για το ρ . Ομοίως, από το σύστημα (8) δεν προκύπτουν ακέραιες τιμές για το ρ .

Εναλλακτικά, όταν φθάσουμε στην αναγκαία συνθήκη $\Delta' = 64 + 4\rho^2 = w^2$ μπορούμε να συνεχίσουμε ως εξής:

$$\Delta' = 64 + 4\rho^2 = w^2 \Leftrightarrow w^2 - 4\rho^2 = 64 \Leftrightarrow (w-2\rho)(w+2\rho) = 64.$$

Στη συνέχεια, για την επιλογή των ακέραιων παραγόντων του πρώτου μέλους, παρατηρούμε ότι:

$$(w+2\rho) + (w-2\rho) = 2w = \text{πολλαπλάσιο του } 2$$

$$(w+2\rho) - (w-2\rho) = 4\rho = \text{πολλαπλάσιο του } 4.$$

Επομένως οι περιπτώσεις που οδηγούν σε θετικές ακέραιες λύσεις για τα w και ρ είναι μόνον οι εξής:

- $\begin{cases} w+2\rho=16 \\ w-2\rho=4 \end{cases} \Leftrightarrow (w,\rho)=(10,3)$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται:
 $y^2+8y-9=0 \Leftrightarrow y=-9$ ή $y=1$, οπότε από την αρχική εξίσωση προκύπτουν τα ζεύγη $(x,y)=(12,-9)$ και $(x,y)=(-2,1)$.
- $\begin{cases} w+2\rho=8 \\ w-2\rho=8 \end{cases} \Leftrightarrow (w,\rho)=(8,0)$. Τότε η εξίσωση (6) γίνεται:
 $y^2+8y=0 \Leftrightarrow y=0$ ή $y=-8$, οπότε από την αρχική εξίσωση προκύπτουν τα ζεύγη $(x,y)=(0,0)$ και $(x,y)=(10,-8)$.

Μπορούμε ακόμη να θεωρήσουμε την εξίσωση ως τριώνυμο μεταβλητής y και να εργαστούμε ανάλογα, όπως στη παραπάνω περίπτωση. Τότε καταλήγουμε στην αναγκαία συνθήκη να είναι τέλειο η διακρίνουσα $\Delta = x^2 - 10x + 24 = (x-5)^2 - 1$, δηλαδή $(x-5)^2 - 1 = \omega^2 \Leftrightarrow (x-5)^2 - \omega^2 = 1 \Leftrightarrow (x-5-\omega)(x-5+\omega) = 1$, από την οποία προκύπτουν τελικά οι ακέραιες λύσεις της αρχικής εξίσωσης.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται τα σύνολα A_1, A_2, \dots, A_{160} τέτοια ώστε $|A_i| = i, i = 1, 2, \dots, 160$. Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούρια σύνολα M_1, M_2, \dots, M_n με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα A_1, A_2, \dots, A_{160} και αφαιρούμε από καθένα από αυτά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου M_1 . Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το σύνολο M_2 . Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των συνόλων A_1, A_2, \dots, A_{160} ορίζοντας έτσι τα σύνολα M_3, \dots, M_n . Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού n .

Λύση

Υποθέτουμε ότι κατά το πρώτο βήμα αφαιρούμε από όλα τα επιλεγμένα σύνολα k_1 στοιχεία, κατά το δεύτερο βήμα αφαιρούμε k_2 στοιχεία και ομοίως κατά το n -στό βήμα αφαιρούμε k_n στοιχεία. Όταν εξαντληθούν τα στοιχεία όλων των συνόλων A_1, A_2, \dots, A_n , τότε θα πρέπει το κάθε $i = |A_i|, i = 1, 2, \dots, 160$, να είναι άθροισμα κάποιων όρων από τους k_1, k_2, \dots, k_n . Όμως τα δυνατά αθροίσματα που δημιουργούνται από όρους που ανήκουν στο σύνολο $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ είναι 2^n , αφού για τη δημιουργία τέτοιων αθροισμάτων για κάθε όρο υπάρχουν δύο επιλογές, δηλαδή μπορούμε να συμπεριλάβουμε τον όρο στο άθροισμα ή όχι. Επομένως πρέπει να ισχύει ότι $2^n \geq 160$, οπότε πρέπει $n \geq 8$ και η ελάχιστη πιθανή τιμή του n είναι το 8.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι για $n = 8$ μπορούμε να επιτύχουμε την εξάντληση των στοιχείων των δεδομένων συνόλων με την προβλεπόμενη διαδικασία, οπότε η ελάχιστη δυνατή τιμή του n θα είναι 8.

Στο πρώτο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_{81}, \dots, A_{160} και αφαιρούμε από το καθένα από αυτά 80 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_1 θα έχει $80 \cdot 80 = 6400$ στοιχεία.

Συμβολίζουμε τα σύνολα που απομένουν μετά την αφαίρεση των 80 στοιχείων ως $A_{81}^1, \dots, A_{160}^1$. Τότε τα σύνολα A_i και A_{80+i}^1 , $i = 1, 2, \dots, 80$ έχουν από i στοιχεία. Στο δεύτερο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_{41}, \dots, A_{80} , $A_{121}^1, \dots, A_{160}^1$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 40 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_2 θα έχει $80 \cdot 40 = 3200$ στοιχεία.

Συμβολίζουμε τα σύνολα που απομένουν μετά την αφαίρεση των 40 στοιχείων ως $A_{41}^1, \dots, A_{80}^1$ και $A_{121}^2, \dots, A_{160}^2$. Τότε τα σύνολα A_i , A_{40+i}^1 , A_{80+i}^1 και A_{120+i}^2 , $i = 1, 2, \dots, 40$ έχουν το καθένα από i στοιχεία. Στο τρίτο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_{21}, \dots, A_{40} , $A_{60+i}^1, \dots, A_{100+i}^1$, A_{140+i}^2 , $i = 1, 2, \dots, 20$ αφαιρούμε από καθένα από αυτά 20 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_3 θα έχει $80 \cdot 20 = 1600$ στοιχεία.

Συνεχίζουμε ομοίως με ανάλογους συμβολισμούς, θεωρώντας στο τέταρτο βήμα τα σύνολα A_{10+i} , A_{30+i}^1 , A_{50+i}^2 , A_{70+i}^2 , A_{90+i}^2 , A_{110+i}^2 , A_{130+i}^3 , A_{150+i}^3 , $i = 1, 2, \dots, 10$, και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 10 στοιχεία. Έτσι το σύνολο M_4 θα έχει $80 \cdot 10 = 800$ στοιχεία. Τα σύνολα που απομένουν έχουν το καθένα το πολύ 10 στοιχεία. Στο πέμπτο βήμα επιλέγουμε τα μισά από αυτά, δηλαδή τα $A_{5+i(\text{mod}10)}^\ell$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ με τον κατάλληλο εκθέτη $\ell = 1, 2, 3, 4$ κάθε φορά και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 5 στοιχεία, οπότε το σύνολο M_5 θα έχει $80 \cdot 5 = 400$ στοιχεία. Έτσι έχουν απομείνει 32 ομάδες συνόλων που έχουν από ένα μέχρι πέντε στοιχεία. Στο έκτο βήμα επιλέγουμε από αυτά τα $A_{2+i(\text{mod}5)}^\ell$, $i = 1, 2, 3$, συνολικά 96 σύνολα, με τον κατάλληλο εκθέτη $\ell = 1, 2, \dots, 5$ κάθε φορά και αφαιρούμε από καθένα από αυτά 3 στοιχεία, οπότε το σύνολο M_6 θα έχει $96 \cdot 3 = 288$ στοιχεία. Τότε τα 32 σύνολα $A_{3(\text{mod}5)}^\ell$ γίνονται κενά, τα σύνολα A_1 , $A_{1(\text{mod}3)}^\ell$ έχουν από ένα στοιχείο, ενώ τα σύνολα A_2 , $A_{2(\text{mod}3)}^\ell$, με τον κατάλληλο δείκτη $\ell = 1, 2, \dots, 6$ έχουν από δύο στοιχεία. Στο έβδομο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_2 , $A_{2(\text{mod}3)}^\ell$, με τον κατάλληλο δείκτη $\ell = 1, 2, \dots, 6$ και τους αφαιρούμε από δύο στοιχεία, οπότε γίνονται κενά, ενώ στο όγδοο βήμα θεωρούμε τα σύνολα A_1 , $A_{1(\text{mod}3)}^\ell$, $\ell = 1, 2, \dots, 6$ και τους αφαιρούμε από ένα στοιχείο, οπότε γίνονται κενά.

Έτσι το σύνολο M_7 θα έχει 128 στοιχεία, ενώ το σύνολο M_8 θα έχει 64 στοιχεία.

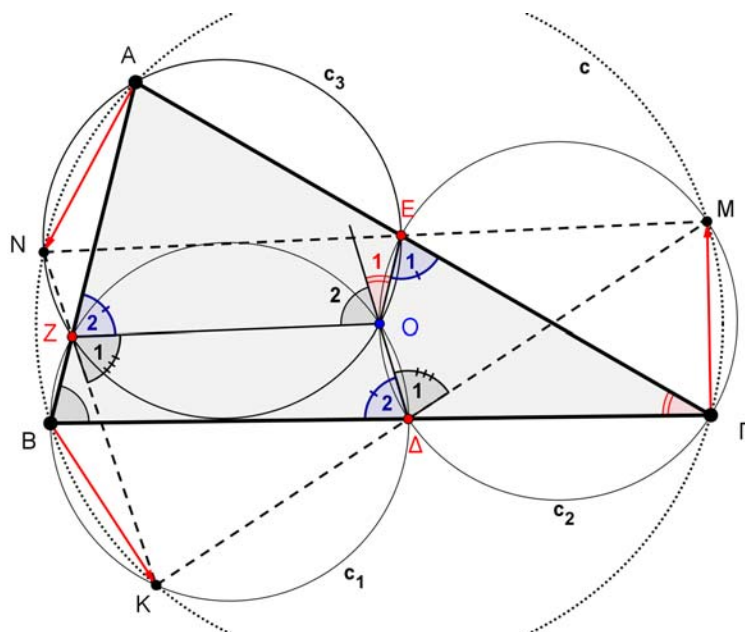
Παρατήρηση. Η προηγούμενη απόδειξη για ότι ο αριθμός των βημάτων μπορεί να είναι 8, δεν είναι μοναδική. Θα μπορούσαμε στο πρώτο βήμα να πάρουμε τα 81 σύνολα $A_{80}, A_{81}, \dots, A_{160}$ και να τους αφαιρέσουμε από 80 στοιχεία με ανάλογη συνέχεια στα επόμενα βήματα. Τότε θα αφαιρούσαμε στο πρώτο βήμα $81 \cdot 80 = 6480$ στοιχεία που είναι και το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων που μπορεί να αφαιρεθούν στο πρώτο βήμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και έστω Δ τυχόν σημείο της πλευράς $B\Gamma$ (διαφορετικό από το μέσο της $B\Gamma$). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $BO\Delta$ (έστω c_1) τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο K και την AB στο σημείο Z . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του

τριγώνου $\Gamma O \Delta$, έστω c_2 , τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο M και την $ΑΓ$ στο σημείο E . Τέλος, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AEZ έστω c_3 , τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο N . Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και KMN είναι ίσα.

Λύση



Σχήμα 1

Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος c_3 περνάει από το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_2 τετράπλευρο $O\Delta\Gamma E$ έχουμε: $\hat{O}_1 = \hat{\Gamma}$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_1 τετράπλευρο $O\Delta BZ$ έχουμε: $\hat{O}_2 = \hat{B}$.

Από τη πρόσθεση κατά μέλη των δύο προηγούμενων ισοτήτων γωνιών λαμβάνουμε:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma} \Rightarrow E\hat{O}Z = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ - \hat{A},$$

οπότε το τετράπλευρο $AE OZ$ είναι εγγράψιμο (άθροισμα απέναντι γωνιών 180°).

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι οι κύκλοι c_1, c_2, c_3 είναι ίσοι μεταξύ τους.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_1 τετράπλευρο $O\Delta BZ$ έχουμε: $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο στο κύκλο c_2 τετράπλευρο $O\Delta\Gamma E$ έχουμε: $\hat{\Delta}_2 = \hat{E}_1$.

Επομένως έχουμε ότι: $\hat{\Delta}_2 = \hat{Z}_2 = \hat{E}_1$. Οι τρεις αυτές ίσες γωνίες βαίνουν στις ίσες χορδές $OB, O\Gamma$ και OA των κύκλων c_1, c_2 και c_3 αντίστοιχα. Άρα οι κύκλοι c_1, c_2, c_3 έχουν ίσες ακτίνες, οπότε είναι ίσοι μεταξύ τους.

Στους ίσους κύκλους c_1 και c_2 , οι γωνίες \hat{Z}_1 και $\hat{\Delta}_1$ βαίνουν στις ίσες χορδές OK και OM ($OK = OM = R$), οπότε θα είναι: $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1$.

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι τα σημεία K, Δ, M είναι συνευθειακά. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία M, E, N και τα σημεία N, Z, K είναι επίσης συνευθειακά.

Από τις ισότητες των γωνιών $\widehat{B\hat{A}K} = \widehat{G\hat{A}M}$ και $\widehat{G\hat{E}M} = \widehat{A\hat{E}N}$ (που είναι κατά κορυφή) προκύπτει η ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων $AN = BK = GM$ (τα οποία είναι χορδές του κύκλου $c(O, R)$).

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και KMN έχουν κοινό περίκεντρο O και το KMN είναι η εικόνα του $AB\Gamma$ στη στροφή με κέντρο το σημείο O και γωνία $\widehat{A\hat{O}N} = \widehat{B\hat{O}K} = \widehat{G\hat{O}M} = \hat{\omega}$. Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους.

Παρατήρηση. Το περίκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, ταυτίζεται με το σημείο Miquel που αντιστοιχεί στα σημεία Δ, E, Z των πλευρών του τριγώνου. Έτσι μπορεί να προκύψει άμεσα ότι το τετράπλευρο $AEOZ$ είναι εγγράψιμο.