

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ ΕΜΕ
28^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
ΣΑΒΒΑΤΟ, 26 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011
Ενδεικτικές Λύσεις θεμάτων μεγάλων τάξεων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να λύσετε στους ακέραιους την εξίσωση

$$x^3 y^2 (2y - x) = x^2 y^4 - 36.$$

Λύση

Μετά τις πράξεις διαπιστώνουμε ότι η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\begin{aligned} x^2 y^2 (x - y)^2 - 6^2 &= 0, \quad x, y \in \mathbb{Z}, \\ \Leftrightarrow [xy(x - y) - 6] \cdot [xy(x - y) + 6] &= 0, \quad x, y \in \mathbb{Z}, \\ \Leftrightarrow xy(x - y) = 6, \quad x, y \in \mathbb{Z}, \quad \text{ή} \quad xy(x - y) &= -6, \quad x, y \in \mathbb{Z}. \\ \Leftrightarrow xy(x - y) = 6, \quad x, y \in \mathbb{Z}, \quad (1) \quad \text{ή} \quad xy(y - x) &= 6, \quad x, y \in \mathbb{Z}. \quad (2) \end{aligned}$$

Από τη μορφή των (1) και (2) προκύπτει ότι, αν (x_0, y_0) είναι λύση της (1), τότε το ζευγάρι (y_0, x_0) είναι λύση της (2) και αντιστρόφως. Επομένως, αρκεί να λύσουμε μόνον την εξίσωση (1). Επειδή $x, y \in \mathbb{Z}$, η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με :

$$\begin{aligned} \{xy = 6, x - y = 1\} (\Sigma_1) \quad \text{ή} \quad \{xy = -6, x - y = -1\} (\Sigma_2) \\ \text{ή} \{xy = 3, x - y = 2\} (\Sigma_3) \quad \text{ή} \quad \{xy = -3, x - y = -2\} (\Sigma_4) \\ \text{ή} \{xy = 1, x - y = 6\} (\Sigma_5) \quad \text{ή} \quad \{xy = -1, x - y = -6\} (\Sigma_6) \\ \text{ή} \{xy = 2, x - y = 3\} (\Sigma_7) \quad \text{ή} \quad \{xy = -2, x - y = -3\} (\Sigma_8). \end{aligned}$$

Από τα 8 συστήματα μόνον τα (Σ_1) , (Σ_3) , (Σ_8) δίνουν τις ακέραιες λύσεις:

$$\begin{aligned} (x, y) = (3, 2), (x, y) = (-2, -3), (x, y) = (3, 1), \\ (x, y) = (-1, -3), (x, y) = (-2, 1) \text{ και } (x, y) = (-1, 2). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με όσα είπαμε παραπάνω, η εξίσωση (2) έχει στους ακέραιους τις λύσεις

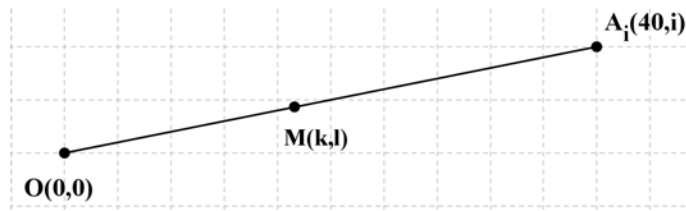
$$\begin{aligned} (x, y) = (2, 3), (x, y) = (-3, -2), (x, y) = (1, 3), \\ (x, y) = (-3, -1), (x, y) = (1, -2) \text{ και } (x, y) = (2, -1). \end{aligned}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A_1(40,1)$, $A_2(40,2)$, ..., $A_{40}(40,40)$ καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1, OA_2, \dots, OA_{40}$. Ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy θα το ονομάζουμε "καλό", όταν οι συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί και βρίσκεται στο εσωτερικό (δηλαδή δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα άκρα του) ενός ευθυγράμμου τμήματος OA_i $i = 1, 2, 3, \dots, 40$. Επίσης, ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα $OA_1, OA_2, \dots, OA_{40}$, θα το ονομάζουμε "καλό", όταν περιέχει ένα τουλάχιστον "καλό" σημείο. Να υπολογισθεί το πλήθος των "καλών" σημείων και το πλήθος των "καλών" ευθυγράμμων τμημάτων.

Λύση.

Στη λύση που ακολουθεί, θα συμβολίζουμε με $MK\Delta(k,l)$, το μέγιστο κοινό διαιρέτη των ακεραίων αριθμών k,l .



Σχήμα 1

Ένα σημείο $M(k,l)$ θα ανήκει στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος OA_i , αν και μόνο αν, τα διανύσματα \overrightarrow{OM} και $\overrightarrow{OA_i}$ έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0 < k \leq 40$), δηλαδή πρέπει να ισχύει $\frac{i}{40} = \frac{l}{k}$ (με k,l ακέραιους αριθμούς και $0 < k \leq 40$).

Για να είναι τώρα το ευθύγραμμο τμήμα OA_i “καλό”, θα πρέπει το κλάσμα $\frac{i}{40}$ να μην είναι ανάγωγο (ώστε να δημιουργούνται ισοδύναμα με το $\frac{i}{40}$ κλάσματα με ακέραιους όρους που θα δημιουργούν το συντελεστή διεύθυνσης $\frac{l}{k}$ και τις αντίστοιχες συντεταγμένες του “καλού” σημείου $M(k,l)$).

Επομένως, για να υπάρχει “καλό” σημείο στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i (ώστε να χαρακτηριστεί και το ίδιο ως “καλό”) θα πρέπει $MK\Delta(40,i) > 1$. Αν τώρα $MK\Delta(40,i) > 1$, τότε θα υπάρχουν $MK\Delta(40,i) - 1$ “καλά” σημεία στο ευθύγραμμο τμήμα OA_i . Στο σημείο $A_2(40,2)$ αντιστοιχεί το “καλό” ευθύγραμμο τμήμα OA_2 , στο οποίο ανήκει το “καλό” σημείο $(20,1)$. Στο σημείο $A_4(40,4)$ αντιστοιχεί το “καλό” ευθύγραμμο τμήμα OA_4 , στο οποίο ανήκουν τα “καλά” σημεία $(10,1)$, $(20,2)$, $(30,3)$. Με αυτό τον τρόπο δημιουργούμε τον πίνακα:

| | | | | | |
|-----------------|----------------------|---|-----------------|----------------------|----|
| $A_2(40,2)$ | $MK\Delta(40,2)=2$ | 1 | $A_{40}(40,40)$ | $MK\Delta(40,40)=40$ | 39 |
| $A_4(40,4)$ | $MK\Delta(40,4)=4$ | 3 | $A_{38}(40,38)$ | $MK\Delta(40,38)=2$ | 1 |
| $A_5(40,5)$ | $MK\Delta(40,5)=5$ | 4 | $A_{36}(40,36)$ | $MK\Delta(40,36)=4$ | 3 |
| $A_6(40,6)$ | $MK\Delta(40,6)=2$ | 1 | $A_{35}(40,35)$ | $MK\Delta(40,35)=5$ | 4 |
| $A_8(40,8)$ | $MK\Delta(40,8)=8$ | 7 | $A_{34}(40,34)$ | $MK\Delta(40,34)=2$ | 1 |
| $A_{10}(40,10)$ | $MK\Delta(40,10)=10$ | 9 | $A_{32}(40,32)$ | $MK\Delta(40,32)=8$ | 7 |
| $A_{12}(40,12)$ | $MK\Delta(40,12)=4$ | 3 | $A_{30}(40,30)$ | $MK\Delta(40,30)=10$ | 9 |
| $A_{14}(40,14)$ | $MK\Delta(40,14)=2$ | 1 | $A_{28}(40,28)$ | $MK\Delta(40,28)=4$ | 3 |
| $A_{15}(40,15)$ | $MK\Delta(40,15)=5$ | 4 | $A_{26}(40,26)$ | $MK\Delta(40,26)=2$ | 1 |
| $A_{16}(40,16)$ | $MK\Delta(40,16)=8$ | 7 | $A_{25}(40,25)$ | $MK\Delta(40,25)=5$ | 4 |

| | | | | | |
|------------|---------------|-----------|------------|--------------|-----------|
| A18(40,18) | MKΔ(40,18)=2 | 1 | A24(40,24) | MKΔ(40,24)=8 | 7 |
| A20(40,20) | MKΔ(40,20)=20 | 19 | A22(40,22) | MKΔ(40,22)=2 | 1 |
| | | 60 | | | 80 |

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι το πλήθος των “καλών” τμημάτων είναι 24 και το πλήθος των καλών σημείων 140.

Παρατηρήσεις

1. Ο παραπάνω πίνακας έχει ευρεία ανάπτυξη για διδακτικούς λόγους.
2. Ο υπολογισμός του πίνακα διευκολύνεται σημαντικά με τη χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων του μέγιστου κοινού διαιρέτη:

$$\text{MK}\Delta(k, l) = \text{MK}\Delta(l, k) = \text{MK}\Delta(l - k, k) = \text{MK}\Delta(|l - k|, |k|).$$

3. Το πλήθος των “καλών” ευθυγράμμων τμημάτων μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης ϕ του Euler. Είναι γνωστό ότι $n - \phi(n)$ παριστά το πλήθος των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι ή ίσοι με τον n και δεν είναι πρώτοι προς αυτόν. Επειδή όμως $40 = 5 \cdot 2^3$, έχουμε:

$$\phi(40) = 40 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40 \frac{1}{2} \frac{4}{5} = 16.$$

Άρα το πλήθος των “καλών” ευθυγράμμων τμημάτων είναι $40 - \phi(40) = 24$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 6, να προσδιορίσετε τη μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$S = \sqrt[3]{a^2 + 2bc} + \sqrt[3]{b^2 + 2ca} + \sqrt[3]{c^2 + 2ab}.$$

Λύση.

Χρησιμοποιούμε την ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου ως εξής:

$$\sqrt[3]{a^2 + 2bc} = \frac{1}{\sqrt[3]{12^2}} \sqrt[3]{(a^2 + 2bc) \cdot 12 \cdot 12} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{12^2}} \cdot \frac{a^2 + 2bc + 12 + 12}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}} (a^2 + 2bc + 24),$$

$$\sqrt[3]{b^2 + 2ca} = \frac{1}{\sqrt[3]{12^2}} \sqrt[3]{(b^2 + 2ca) \cdot 12 \cdot 12} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{12^2}} \cdot \frac{b^2 + 2ca + 12 + 12}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}} (b^2 + 2ca + 24),$$

$$\sqrt[3]{c^2 + 2ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{12^2}} \sqrt[3]{(c^2 + 2ab) \cdot 12 \cdot 12} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{12^2}} \cdot \frac{c^2 + 2ab + 12 + 12}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}} (c^2 + 2ab + 24),$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} S = \sqrt[3]{a^2 + 2bc} + \sqrt[3]{b^2 + 2ca} + \sqrt[3]{c^2 + 2ab} &\leq \frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}} (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + 72) \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{12^2}} [(a + b + c)^2 + 72] = \frac{36}{\sqrt[3]{12^2}} = \frac{18}{\sqrt[3]{18}} = 3\sqrt[3]{12}. \end{aligned}$$

Η ισότητα ισχύει όταν

$$\begin{aligned}
& a^2 + 2bc = 12, b^2 + 2ca = 12, c^2 + 2ab = 12 \\
& \Leftrightarrow (a-b)(a+b-2c) = 0, (b-c)(b+c-2a) = 0, c^2 + 2ab = 12 \\
& \Leftrightarrow (a-b)(6-3c) = 0, (b-c)(6-3a) = 0, c^2 + 2ab = 12 \\
& \Leftrightarrow a = b = c = 2.
\end{aligned}$$

Επομένως η μέγιστη τιμή της παράστασης είναι $3\sqrt[3]{12}$ και λαμβάνεται όταν είναι $a = b = c = 2$.

Παρατήρηση

1. Η επιλογή του αριθμού 12 ως δεύτερου και τρίτου όρου για την εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου οφείλεται στο ότι μόνον για αυτόν είναι δυνατόν να αληθεύει η ισότητα και στις τρεις επιμέρους ανισότητες. Αυτό είναι αναγκαίο για είναι δυνατόν η παράσταση να πάρει την τιμή που εμφανίζεται ως ένα πάνω φράγμα της. Για παράδειγμα, αν είχαμε χρησιμοποιήσει τις ανισότητες

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{a^2 + 2bc} &= \sqrt[3]{(a^2 + 2bc) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{a^2 + 2bc + 2}{3}, \\
\sqrt[3]{b^2 + 2ca} &= \sqrt[3]{(b^2 + 2ca) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{b^2 + 2ca + 2}{3}, \\
\sqrt[3]{c^2 + 2ab} &= \sqrt[3]{(c^2 + 2ab) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{c^2 + 2ab + 2}{3},
\end{aligned}$$

τότε με πρόσθεση κατά μέλη θα βρίσκαμε

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt[3]{a^2 + 2bc} + \sqrt[3]{b^2 + 2ca} + \sqrt[3]{c^2 + 2ab} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + 6}{3} \\
&= \frac{(a+b+c)^2 + 6}{3} = \frac{42}{3} = 14.
\end{aligned}$$

Η ισότητα στην τελευταία σχέση δεν μπορεί να αληθεύει, όπως προκύπτει από το σύστημα

$$\begin{aligned}
& a^2 + 2bc = 1, b^2 + 2ca = 1, c^2 + 2ab = 1 \\
& \Rightarrow (a+b+c)^2 = 3, \text{ άτοπο.}
\end{aligned}$$

2. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό

$$x = \sqrt[3]{a^2 + 2bc}, y = \sqrt[3]{b^2 + 2ca}, z = \sqrt[3]{c^2 + 2ab},$$

μέσω του οποίου η συνάρτηση γίνεται $S(x, y, z) = x + y + z$, της οποίας ζητάμε τη μέγιστη τιμή υπό τη συνθήκη $x^3 + y^3 + z^3 = (a+b+c)^2 = 36$. Στη συνέχεια θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του **Lagrange**, χωρίς σοβαρό πρόβλημα στις πράξεις. Επίσης θα μπορούσε κάποιος να εργαστεί χρησιμοποιώντας και άλλες κλασικές ανισότητες, όπως η ανισότητα του **Holder** ή την ανισότητα των δυνάμεων.

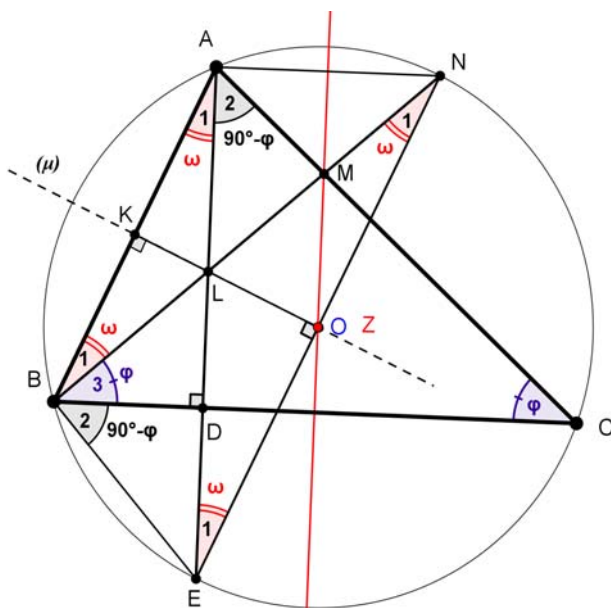
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετη (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L . Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο N . Τέλος η EN τέμνει τη μεσοκάθετη (μ) στο σημείο Z .

Να αποδείξετε ότι: $MZ \perp BC \Leftrightarrow (CA = CB \text{ ή } Z \equiv O)$, δηλαδή ότι “η MZ είναι κάθετη στην BC , αν, και μόνο αν, το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O, R)$ ”.

Λύση

Επειδή το σημείο L ανήκει στη μεσοκάθετη του AB , θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega}$ και κατά συνέπεια $AN = BE$. Άρα το τετράπλευρο $ABEN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB \parallel EN$, οπότε η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN και $\hat{E}_1 = \hat{N}_1 = \hat{\omega}$.



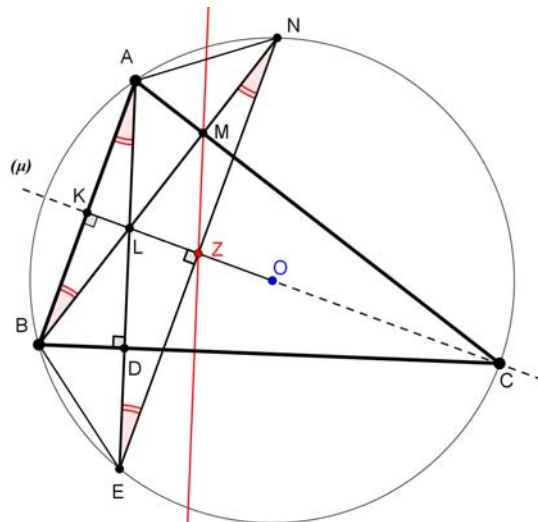
Σχήμα 2

Έστω ότι το σημείο Z ταυτίζεται με το σημείο O (Σχήμα 2).

Τότε η EN γίνεται διάμετρος του κύκλου, οπότε $\hat{E}B\hat{N} = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^\circ$. Αν $\hat{C} = \hat{\phi}$ τότε από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$ έχουμε: $\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = 90^\circ - \hat{\phi}$.

Από τη τελευταία ισότητα (σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^\circ$) έχουμε: $\hat{B}_3 = \hat{\phi}$. Άρα το M ανήκει στη μεσοκάθετη του BC ($MB = MC$). Το σημείο O ανήκει επίσης στη μεσοκάθετη του BC και επειδή ταυτίζεται με το σημείο Z , συμπεραίνουμε ότι η MZ είναι μεσοκάθετος της BC .

Έστω ότι το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$). Τότε η μεσοκάθετος (μ) της AB είναι ύψος του τριγώνου ABC (Σχήμα 2), δηλαδή το L είναι το ορθόκέντρο του τριγώνου ABC και κατά συνέπεια **το σημείο M είναι το μέσο του τμήματος LN** (η BM είναι ύψος και το σημείο N είναι το συμμετρικό του ορθοκέντρου L ως προς την AC).



Σχήμα 3

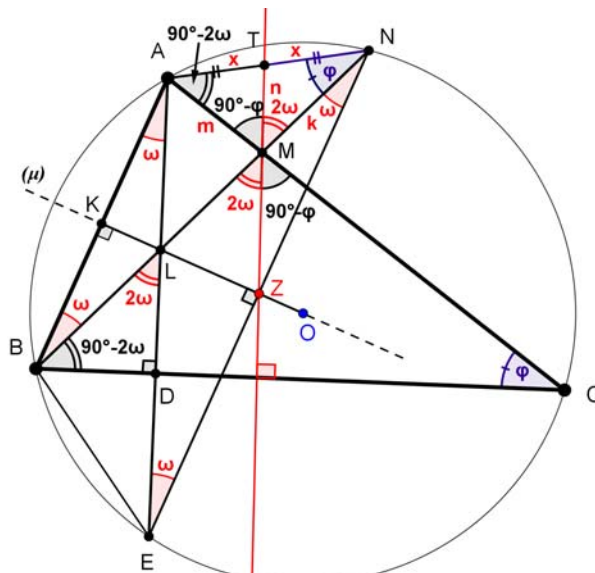
Το σημείο Z είναι το μέσο του τμήματος EN (διότι η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN).

Άρα η MZ είναι παράλληλη με την AD .

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η MZ είναι κάθετη στην BC και θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$) ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου (Σχήμα 4).

Έστω λοιπόν ότι η MZ είναι κάθετη στην BC . Τότε η MZ θα είναι παράλληλη με την AE ($MZ \parallel AE$).

Αν T είναι η τομή της MZ με την AN τότε το T είναι το μέσο AN (διότι Z είναι το μέσο της NE και $MZ \parallel AE$). Άρα τα τρίγωνα MTA και MTN έχουν το ίδιο εμβαδό ($E_1 = (MTA) = (MTN) = E_2$).



Σχήμα 4

Από την παραλληλία $MZ \parallel AE$, προκύπτει η “μεταφορά” γωνιών στο τρίγωνο AMN στο οποίο η MT είναι διάμεσος. Σημειώνουμε ότι:

$B\hat{L}D = 2\hat{\omega}$ (διότι η $B\hat{L}D$ είναι εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου LEN).
 $L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$ (διότι $LD \parallel MZ$ οπότε $B\hat{L}D = L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$).

Χρησιμοποιώντας τώρα το γνωστό τύπο $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ για το εμβαδό τριγώνου, έχουμε:

$$E_1 = \frac{1}{2}mn\eta\mu(90 - \varphi) = \frac{1}{2}mx\eta\mu(90 - 2\omega)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}kn\eta\mu 2\omega = \frac{1}{2}kx\eta\mu\varphi$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu 2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\omega}{\eta\mu\varphi} \Leftrightarrow \eta\mu 2\varphi = \eta\mu 4\omega.$$

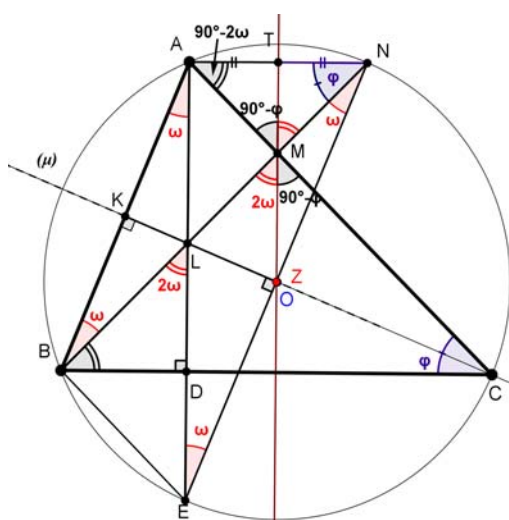
Από τη τελευταία ισότητα ημιτόνων (και με δεδομένο ότι οι γωνίες ω, φ είναι γωνίες τριγώνου) καταλήγουμε στις ισότητες:

$$2\varphi = 4\omega \Leftrightarrow \varphi = 2\omega \quad (A) \quad \text{ή} \quad 2\varphi = \pi - 4\omega \Leftrightarrow \varphi + 2\omega = \frac{\pi}{2} \quad (B).$$

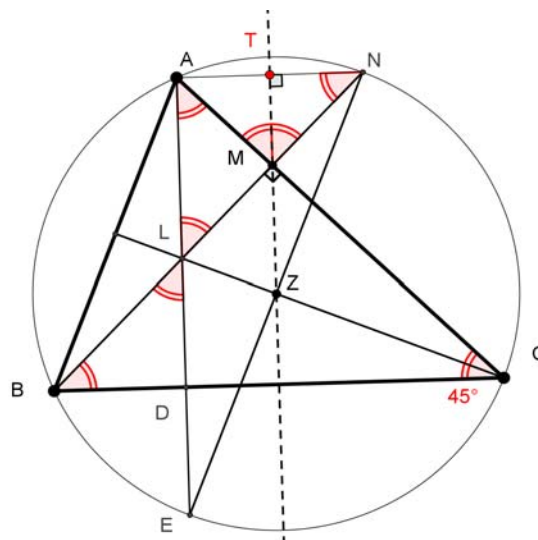
Από την ισότητα (A) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ισοσκελές ($TM = TN$) και κατά συνέπεια το τρίγωνο AMN είναι ορθογώνιο στο M ($A\hat{M}N = 90^\circ$). Άρα η BM είναι ύψος του τριγώνου ABC και επομένως το L ορθόκεντρο, δηλαδή το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$) διότι η μεσοκάθετος KZ είναι και ύψος.

Από την ισότητα (B) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ορθογώνιο στο T , δηλαδή η MT είναι μεσοκάθετος της AN . Άρα η MT θα διέρχεται από το O (οπότε $Z \equiv O$).

Παρατήρηση



Σχήμα 5



Σχήμα 6

Αν το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA = CB$ και $\hat{C} = \hat{\varphi} = 45^\circ$, τότε τα τρίγωνα TMN , TMA και AMN είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Το τετράπλευρο $ABCN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα η TM είναι μεσοκάθετη της BC .

Στη περίπτωση αυτή και το σημείο Z ταυτίζεται με το σημείο O , οπότε η διάζευξη των προτάσεων ($CA = CB$ ή $Z \equiv O$) είναι εγκλειστική.