ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΕΦ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ-2017

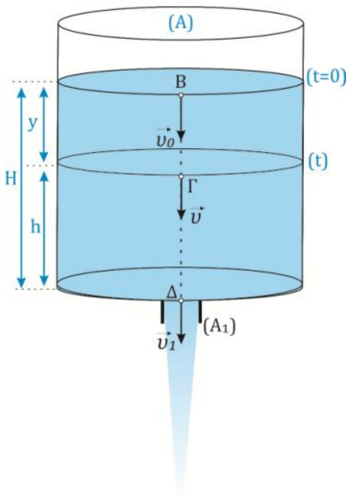
ΘΕΜΑ Α΄

Α1 - Λ	**Α2 - Λ**	**Α3 - Σ**	**Α4 - Λ**	**Α5 - Λ**
Α6 - Σ	**Α7 - Λ**	**Α8 - Λ**	**Α9 - Λ**	**Α10 - Λ**

ΘΕΜΑ Β΄

Β1. ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Τη χρονική στιγμή $t=0$ τραβάμε ακαριαία το πώμα από την οπή. Έστω υ_0 το μέτρο της ταχύτητας ροής των σημείων της επιφανείας του νερού αρχικά. Μια τυχαία χρονική στιγμή t που η στάθμη έχει κατέβει κατά y το μέτρο της ταχύτητας ροής των σημείων της επιφανείας του νερού είναι υ , ενώ η ταχύτητα εκροής από την οπή είναι υ_1. Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής από το σημείο Γ στο σημείο Δ.



$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g h = p_\Delta + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$. Αλλά $p_\Gamma = p_\Delta = p_{\alpha\tau\mu}$

οπότε η σχέση γίνεται:

$$\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \quad ή \quad \upsilon_1^2 = \upsilon^2 + 2gh \quad (1).$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση της συνέχειας : $A\cdot\upsilon = A_1\cdot\upsilon_1$

ή $A\cdot\upsilon = \frac{A}{3}\cdot\upsilon_1$ ή $\upsilon_1 = 3\upsilon$ (2)

Όμως $h = H - y$. Από (1), (2) έχουμε:

$$8\upsilon^2 = 2gh \;\; ή \;\; 8\upsilon^2 = 2g\left(H-y\right) \;\; ή \;\; \upsilon^2 = \frac{gH}{4} - \frac{g}{4}\cdot y \quad (3) .$$

Η σχέση αυτή είναι της μορφής $\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2\alpha\cdot y$ (4) εξίσωση που χαρακτηρίζει κάθε ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Με σύγκριση ομοίων όρων μεταξύ των σχέσεων (3) και(4) έχουμε: $\upsilon_0^2 = \frac{gH}{4}$ ή $\upsilon_0 = \sqrt{\frac{gH}{4}}$ ενώ $2\alpha = \frac{g}{4}$ ή $\alpha = \frac{g}{8}$

Από την εξίσωση κίνησης έχουμε:

$$\upsilon=\upsilon_0-\alpha\cdot t \text{ ή } \upsilon=\sqrt{\frac{gH}{4}}-\frac{g}{8}\cdot t \text{ ή } 0=\sqrt{\frac{gH}{4}}-\frac{g}{8}\cdot t \text{ ή } t=\frac{8}{g}\sqrt{\frac{gH}{4}}=4\sqrt{\frac{H}{g}}$$

Β2. ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Υπολογίζουμε την ταχύτητα που έχει το σύστημα μάζας M τη στιγμή της σύγκρουσης με το έδαφος με ΑΔΜΕ: $Mgh=\frac{1}{2}MV^2$ ή $V=\sqrt{2gh}=\sqrt{3}\,m/s$.

Το σώμα μάζας m εκτελεί αατ ξεκινώντας τη χρονική στιγμή $t=0$ από τη θέση φυσικού μήκους με ταχύτητα μέτρου V.

Για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης ισχύει:

$$\Sigma F=0 \text{ ή } k\cdot\Delta\ell=mg \text{ ή } \Delta\ell=\frac{mg}{k}=0{,}1m$$

Εφαρμόζουμε ΑΔΕ για την αατ τη $t=0$: $\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}k\cdot\Delta\ell^2+\frac{1}{2}mV^2$ ή $A=0{,}2m$

Η μέγιστη δύναμη που δέχεται ο κλωβός από το ελατήριο είναι ίση με τη μέγιστη δύναμη του ελατηρίου: $F_{max}=(\Delta\ell+A)\cdot k=30\,N$

Β3. ΑΠΑΝΤΗΣΗ. Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Είναι $\Delta\ell=H-h$ (1)

Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$\Sigma F=0$ ή $mg=k\cdot\Delta\ell$ (2)

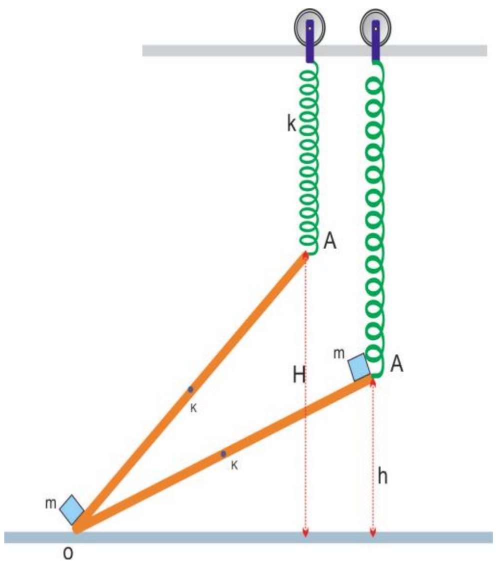
Η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για τη μεταφορά του σώματος είναι:

$$W=mgh+\frac{1}{2}k\cdot\Delta\ell^2=mgh+\frac{1}{2}k\cdot\Delta\ell\cdot\Delta\ell$$

από τις (1), (2) έχουμε:

$$W=mgh+\frac{1}{2}mg\cdot(H-h) \text{ ή}$$

$$W=mgh+\frac{1}{2}mg\cdot(2h-h)=\frac{3}{2}mgh$$



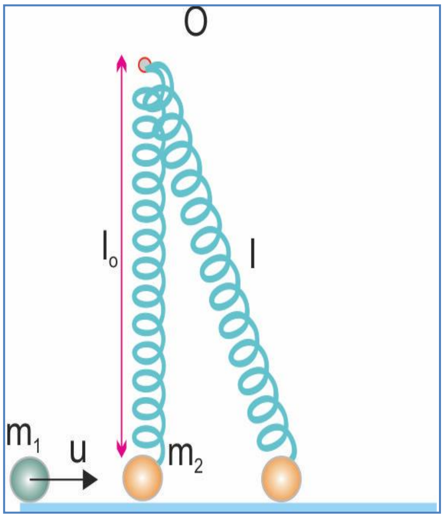
Β4. ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αφού το μήκος της ράβδου ΑΒ είναι σταθερό, πρέπει οι συνιστώσες των ταχυτήτων στη διεύθυνση της ράβδου, στα σημεία Α και Β να είναι ίσες:

$$\upsilon_{A,\rho\alpha\beta\delta} = \upsilon_{B,\rho\alpha\beta\delta} \text{ ή } \upsilon_A \cdot \eta\mu\varphi = \upsilon_B \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \text{ ή } \frac{\upsilon_B}{\upsilon_A} = \varepsilon\varphi\varphi$$

B5. ΑΠΑΝΤΗΣΗ. Η σωστή απάντηση είναι η β.

Η ταχύτητα του m_2 μετά την ελαστική μετωπική κρούση είναι:



$$\upsilon_2 = \frac{2m_1}{m_2 + m_1}\upsilon = \frac{\upsilon}{2} \quad (1)$$

Όταν χαθεί η επαφή του με το οριζόντιο επίπεδο ισχύει

$$F_{\varepsilon\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = m_2 g \text{ ή } k \cdot 0,2 \cdot \ell_0 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = m_2 g \text{ ή}$$

$$k \cdot 0,2 \cdot \ell_0 \cdot \frac{\ell_0}{1,2\ell_0} = m_2 g \text{ ή } k \cdot \ell_0 = 6m_2 g \, (2)$$

Όμως $D = k = m_2 \cdot \omega^2 = 36m_2 \;(3)$

Από (2) , (3) είναι $36m_2 \cdot \ell_0 = 6m_2 g$ ή $\ell_0 = \frac{g}{6}$ (4)

Ενεργειακά ισχύει: $\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2 = \frac{1}{2}k\left(0,2\ell_0\right)^2$ ή $m_2\frac{\upsilon^2}{4} = k\ell_0 \cdot 0,04\ell_0$ ή

$$m_2\frac{\upsilon^2}{4} = 6m_2 g \cdot 0,04\ell_0 \text{ ή } \frac{\upsilon^2}{4} = 6g \cdot 0,04 \cdot \frac{g}{6} \text{ ή } \upsilon = 4\,m/s$$

B6. ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Έστω ν ο αριθμός των δεσμών στη χορδή l_1:

$$l_1 = (\nu - 1)\frac{\lambda_1}{2} = (\nu - 1)\frac{\upsilon_1}{2f}$$

Έστω κ ο αριθμός των δεσμών στη χορδή l_2:

$$l_2 = (\kappa - 1)\frac{\lambda_2}{2} = (\kappa - 1)\frac{\upsilon_2}{2f}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{(\nu - 1)\upsilon_1}{(\kappa - 1)\upsilon_2} \Rightarrow \frac{\nu - 1}{\kappa - 1} = \frac{l_1\upsilon_2}{l_2\upsilon_1} = \frac{0,6 \cdot 110}{0,825 \cdot 200} = \frac{2}{5}$$

αφού οι κ, ν οι μικρότεροι ακέραιοι ισχύει $\nu = 3$ και $\kappa = 6$. Άρα

$$f_{min} = \frac{(\nu - 1)\upsilon_1}{2l_1} = 333hz$$

β) Υπάρχουν συνολικά 8 δεσμοί αφού το σημείο συνάντησης (Γ) δεν το μετράμε δύο φορές.

ΘΕΜΑ Γ΄(ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ)

1η Ερώτηση.

α. Η τροχιά του βαριδιού είναι ευθύγραμμη ή καμπυλόγραμμη;

Η τροχιά του βαριδιού είναι ευθύγραμμη, επειδή η αρχική απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας έγινε κατακόρυφα κατά την διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης (βάρος - τάση ελατηρίου).

β. Από τα πειραματικά δεδομένα μπορείτε να συμπεράνετε αν η κίνηση είναι περιοδική και πώς;

Η κίνηση είναι περιοδική. Αυτό το συμπεραίνουμε από τη γραφική παράσταση θέσης χρόνου η οποία επαναλαμβάνεται σε ίσα χρονικά διαστήματα.

γ. Αν η κίνηση είναι περιοδική, πια είναι η συχνότητά της;

Μεταξύ της χρονικής στιγμής $t_1 = 0{,}82s$ και της χρονικής στιγμής $t_2 = 3{,}18s$ το βαρίδι έχει εκτελέσει 2,5 ταλαντώσεις.

Συνεπώς $2{,}5 \cdot T = t_2 - t_1$ ή $2{,}5 \cdot T = 3{,}18s - 0{,}82s$, οπότε: $T = 0{,}94s$ και $f = 1/T = 1{,}06Hz$

2η Ερώτηση.

Συμφωνείτε ότι η εξίσωση κίνησης του βαριδιού είναι αυτή και γιατί;
ΠΡΟΣΟΧΗ: Η γραφική παράσταση Θέσης – χρόνου τέμνει τον άξονα θέσης στο (-0,03m, 0s).

Συμφωνώ διότι:

Η εξίσωση κίνησης ενός σώματος που εκτελεί α.α.τ. είναι της μορφής
$x = A\eta\mu(\omega t + \varphi_o)$

Από τη γραφική παράσταση παρατηρώ ότι το πλάτος είναι: $A = 0{,}04m$

Η $\omega = 2\pi f = 6{,}66 rad/s$

Την χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ η $x = 0{,}04\eta\mu(3{,}94) = -0{,}03m$

3η Ερώτηση.

Αξιοποιώντας τα στοιχεία της καρτέλας μαθηματικής προσαρμογής και την θεωρητική σας γνώση, να υπολογίσετε την μάζα του βαριδιού;

Γνωρίζουμε ότι στην α.α.τ. η συνισταμένη των δυνάμεων που δρουν στο σώμα είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και ισχύει: $\Sigma F=-D\cdot x$, όπου D η σταθερά επαναφοράς.

Από τα στοιχεία της καρτέλας συμπεραίνω ότι: D=22,13N/m

Η $D = m\cdot\omega^2$ οπότε $22{,}13N/m=m\cdot(6{,}66rad/s)^2$ ή ***m=0,499Kg***

4η Ερώτηση.

Με βάση τη θεωρητική γνώση που διαθέτετε δικαιολογείστε την μορφή της γραφικής παράστασης.

Από τη γραφική παράσταση Θέσης – χρόνου και για το χρονικό διάστημα που μελετήθηκε η α.α.τ, παρατηρώ ότι δεν μεταβάλλεται το πλάτος συνεπώς και η ενέργεια της ταλάντωσης.

Συνεπώς

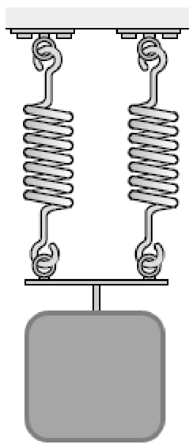
$$\begin{aligned}
&K+U=E_T \text{ ή}\\
&\frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}D\cdot x^2=\frac{1}{2}D\cdot A^2 \text{ ή}\\
&m\cdot\upsilon^2+m\cdot\omega^2\cdot x^2=m\cdot\omega^2\cdot A^2 \text{ ή}\\
&\upsilon^2+\omega^2\cdot x^2=\omega^2\cdot A^2 \text{ ή}\\
&\upsilon=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}
\end{aligned}$$

Της οποίας η γραφική παράσταση είναι σαν αυτή της εικόνας.

5η Ερώτηση.

Χρησιμοποιώντας τα υλικά που διαθέτουν, θα μπορούσαν να αναγκάσουν το βαρίδι να ταλαντώνεται με νέα συχνότητα $f'=\sqrt{2}\cdot f$;

Δώστε την δικής σας απάντηση εξηγώντας ακριβώς τι θα κάνετε και γιατί.



Θα πρέπει να κρεμάσουν και το δεύτερο κομμάτι του ελατηρίου , από τον γάντζο του δυναμόμετρου, και το βαρίδι από τα ελεύθερα άκρα των ελατηρίων.

Αν τώρα απομακρύνουν το βαρίδι από την θέση ισορροπίας του και το αφήσουν ελεύθερο θα εκτελέσει α.α.τ με συχνότητα $f'=\sqrt{2}\cdot f$ και αυτό διότι:

Τα δύο ελατήρια , εφόσον είναι πανομοιότυπα, έχουν το ίδιο Κ.

Όταν το σώμα ήταν κρεμασμένο στο ένα ελατήριο τότε η

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

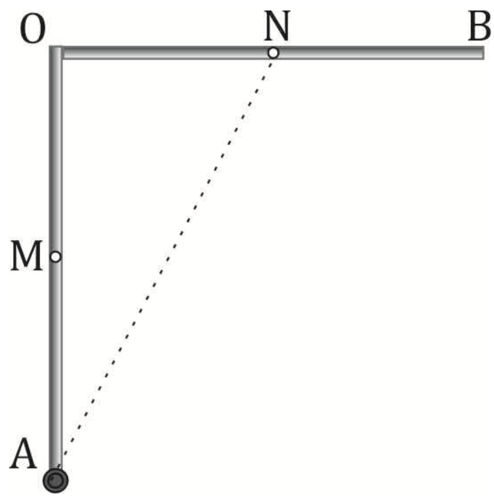
Όμως D=K , οπότε: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$

Όταν το σώμα είναι κρεμασμένο στα δύο ελατήρια D' =2K (με απόδειξη), οπότε:

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{2}\cdot f$$

<u>ΘΕΜΑ Δ΄</u>

Δ1. Υπολογισμός ροπής αδράνειας συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής Ο.



Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο ΑΟΝ, προκύπτει:

$$AN = \sqrt{AO^2 + ON^2} = \sqrt{\ell^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2} \quad \text{ή}$$

$$AN = \frac{\ell}{2}\sqrt{5} \quad (1)$$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ΟΒ, ως προς τον άξονα περιστροφής Α, ισούται με:

$$I_{\rho 1} = I_{cm,\rho 1} + M(AN)^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{5}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{5}{4}M\ell^2 \quad \text{ή}$$

$$I_{\rho 1} = \frac{4}{3}M\ell^2 \quad (2)$$

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ΑΟ, ως προς τον άξονα περιστροφής Ο, ισούται με:

$$I_{\rho 2} = I_{cm,\rho 2} + M\left(\frac{AO}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{4}M\ell^2 \quad \text{ή} \quad I_{\rho 2} = \frac{1}{3}M\ell^2 \quad (3)$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων, ως προς τον άξονα περιστροφής Ο, ισούται με: $I = I_{\rho 1} + I_{\rho 2} = \frac{4}{3}M\ell^2 + \frac{1}{3}M\ell^2 \overset{(2),(3)}{\text{ή}} I = \frac{5}{3}M\ell^2 = 10\,kg\cdot m^2 \quad (4)$

Δ2. Όπως φαίνεται από το σχήμα τα σημεία Ο και Β εκτελούν κυκλική κίνηση με κέντρο Α και ακτίνες:

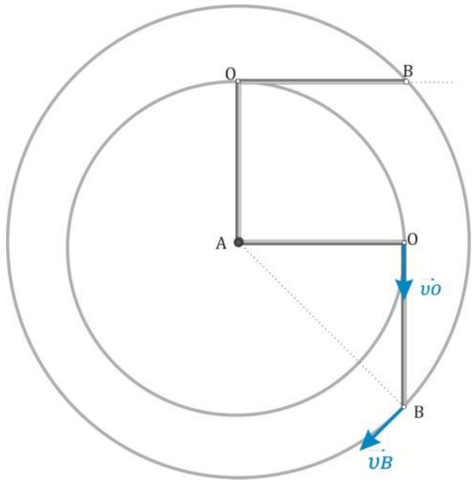
- $r_O = AO = \ell$ και
- $r_B = AB = \sqrt{AO^2 + AB^2} = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \ell\sqrt{2}$

Για τα μέτρα των ταχυτήτων των σημείων Ο και Β ισχύει:

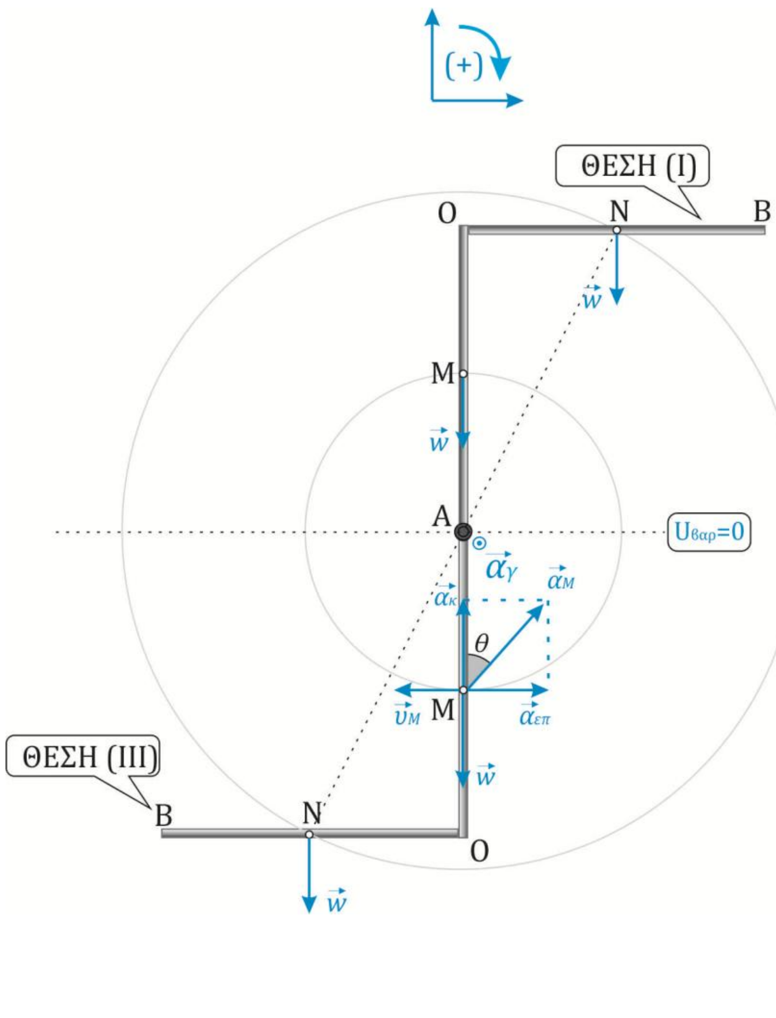
- $\upsilon_0 = \omega r_0 = \omega\ell$
- $\upsilon_B = \omega r_B = \omega\ell\sqrt{2}$

Όπου ω το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος.

Έτσι το πηλίκο $\frac{\upsilon_0}{\upsilon_B}$, ισούται με: $\frac{\upsilon_0}{\upsilon_B} = \frac{\omega\ell}{\omega\ell\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Δ3.



Εφαρμόζοντας το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη ΘΕΣΗ (ΙΙΙ), προκύπτει:

$$\Sigma\tau = \mathrm{I}\alpha_\gamma \;\Rightarrow\; -w\frac{\ell}{2} = \frac{5}{3}M\ell^2\alpha_\gamma \;\Rightarrow\; -Mg\frac{\ell}{2} = \frac{5}{3}M\ell^2\alpha_\gamma \;\Rightarrow$$

$$\alpha_\gamma = -\frac{3g}{10\ell} \;\; (1) \;\; (\text{η φορά της φαίνεται στο παραπάνω σχήμα})$$

Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης του σημείου Μ ισούται με:

$$\alpha_{\varepsilon\pi} = |\alpha_\gamma|\frac{\ell}{2} \;\Rightarrow\; \alpha_{\varepsilon\pi} = \frac{3g}{20} \;\; (2)$$

εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τη μετάβαση του συστήματος από τη ΘΕΣΗ (Ι) στη ΘΕΣΗ (ΙΙΙ), έτσι έχουμε:

$$K_{\mathrm{I}} + U_{\beta\alpha\rho,\mathrm{I}} = K_{\mathrm{III}} + U_{\beta\alpha\rho,\mathrm{III}} \;\overset{K_{\mathrm{I}}=0}{\Rightarrow}\; K_{\mathrm{I}} + U_{\beta\alpha\rho,\mathrm{I}} = K_{\mathrm{III}} + U_{\beta\alpha\rho,\mathrm{III}} \;\Rightarrow$$

$$Mg\ell + Mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega_{\mathrm{III}}^2 - Mg\frac{\ell}{2} - Mg\ell \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\mathrm{I}\omega_{\mathrm{III}}^2 = 3Mg\ell \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\frac{5}{3}M\ell^2\omega_{\mathrm{III}}^2 = 3Mg\ell$$

$$\omega_{\mathrm{III}}^2 = \frac{18g}{5\ell} \;\overset{\omega_{\mathrm{III}} = \frac{\upsilon_M}{\frac{\ell}{2}} = \frac{2\upsilon_M}{\ell}}{\Rightarrow}\; \upsilon_M = \sqrt{\frac{9}{10}g\ell} \;\; (3)$$

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης του σημείου Μ ισούται με:

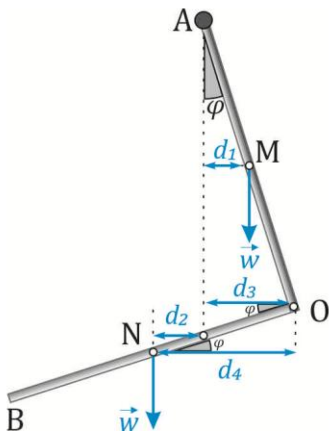
$$\alpha_\kappa = \frac{\upsilon_M^2}{\frac{\ell}{2}} \;\Rightarrow\; \alpha_\kappa = \frac{2\upsilon_M^2}{\ell} \;\overset{(3)}{\Rightarrow}\; \alpha_\kappa = \frac{9}{5}g \;\; (4)$$

Το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης του σημείου Μ ισούται με:

$$\alpha_M = \sqrt{\alpha_{\varepsilon\pi}^2 + \alpha_M^2} \;\Rightarrow\; \alpha_M = 18{,}06\,m/s$$

Για τη γωνία που σχηματίζει το αντίστοιχο διάνυσμα με την οριζόντια διεύθυνση, ισχύει: $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{|\alpha_{\varepsilon\pi}|}{|\alpha_\kappa|} = \dfrac{1}{12}$

Δ4. Όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα, φέρνουμε το σύστημα σε τέτοια θέση ώστε τα βάρη των δύο ράβδων να ασκούν αντίρροπες ροπές. Στη θέση όπου το σύστημα αποκτά μέγιστη κατά μέτρο γωνιακή ταχύτητα ισχύει:



$$\Sigma\tau = 0 \;\Rightarrow\; wd_1 = wd_2 \;\Rightarrow\; d_1 = d_2 \;\; (1)$$

Όμως

- $d_1 = \frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi$
- $d_2 = d_4 - d_3 = \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - \ell\eta\mu\varphi$

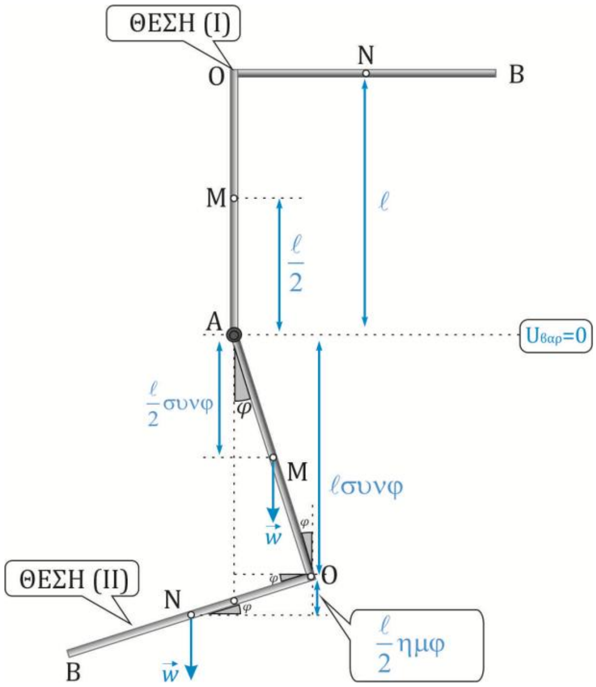
Άρα η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi = \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - \ell\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{3\ell}{2}\eta\mu\varphi = \frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\varphi = \varepsilon\varphi\left(18{,}5^{o}\right) \Rightarrow \varphi = 18{,}5^{o}$$



Για τον υπολογισμό του μέτρου της μέγιστης γωνιακής ταχύτητας εφαρμόζουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για τη μετάβαση του συστήματος από τη ΘΕΣΗ (Ι) στη ΘΕΣΗ (ΙΙ), έτσι έχουμε:

$$K_{I} + U_{\beta\alpha\rho,I} = K_{II} + U_{\beta\alpha\rho,II} \overset{K_I=0}{\Rightarrow} K_{I} + U_{\beta\alpha\rho,I} = K_{II} + U_{\beta\alpha\rho,II} \Rightarrow$$

$$Mg\ell + Mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}I\omega_{max}^2 - Mg\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg\ell\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{1}{2}Mg\ell\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2}Mg\ell = \frac{1}{2}\frac{5}{3}M\ell^2\omega_{max}^2 - \frac{3}{2}Mg\ell\sigma\upsilon\nu\varphi - Mg\frac{\ell}{2}\eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{3g}{5\ell}\left(3 + 3\sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\varphi\right)}$$

Αντικαθιστώντας όπου $\eta\mu\varphi = \eta\mu\left(18{,}5^{o}\right) = 0{,}1\sqrt{10}$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu\left(18{,}5^{o}\right) = 0{,}3\sqrt{10}$

προκύπτει: $\omega_{max} = \sqrt{6\left(\sqrt{10} + 3\right)}\,rad/s$