ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \left(8x^3 - \text{ημ}x - \frac{5}{e^x} + 7\right) dx$$

Λύση:

$$\int \left(8x^3 - \text{ημ}x - \frac{5}{e^x} + 7\right) dx = \int (8x^3 - \text{ημ}x - 5e^{-x} + 7) dx$$

$$= 8\frac{x^4}{4} - (-\text{συν}x) - 5(-e^{-x}) + 7x + c$$

$$= 2x^4 + \text{συν}x + 5e^{-x} + 7x + c$$

2. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{3x-4}$$

Λύση:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (3x-4) = +\infty \end{array}\right. \Rightarrow \text{Απροσδιοριστία της μορφής } \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

$$\text{De L' Hospital: } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{3x-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x}}{3} = +\infty$$

3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $8x^3 - 27x^2 + 18x - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα (λύση) στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση:

Βρίσκουμε το ολοκλήρωμα:

$$\int (8x^3 - 27x^2 + 18x - 2)dx = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 2x + c$$

Έστω

$$f(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 2x$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Επιπλέον,

$$f(1) = 2 - 9 + 9 - 2 = 0 = f(0)$$

Συνεπώς, ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος του Rolle και επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Δηλαδή,

$$8\xi^3 - 27\xi^2 + 18\xi - 2 = 0$$

Άρα, η εξίσωση $8x^3 - 27x^2 + 18x - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα (λύση) στο διάστημα $(0,1)$.

4. Δίνονται τα ψηφία $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

(α) Να βρείτε πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα πιο πάνω ψηφία, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.

(2 μονάδες)

(β) Να βρείτε πόσοι από τους τριψήφιους αριθμούς που σχηματίσαμε στο ερώτημα (α) περιέχουν υποχρεωτικά το ψηφίο 5.

(3 μονάδες)

Λύση:

(α)

9	8	7

Βάση της αρχής της απαρίθμησης μπορούμε να σχηματίσουμε $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ τριψήφιους αριθμούς.

(β) Οι τριψήφιοι αριθμοί είναι της μορφής $5\alpha\beta, \alpha5\beta, \alpha\beta5$ όπου $\alpha, \beta \neq 5$ και $\alpha \neq \beta$.

8	7

Βάση της αρχής της απαρίθμησης σε κάθε περίπτωση μπορούμε να σχηματίσουμε $8 \cdot 7 = 56$ τριψήφιους αριθμούς.

Συνεπώς, συνολικά έχουμε $3 \cdot 56 = 168$ τριψήφιους αριθμούς.

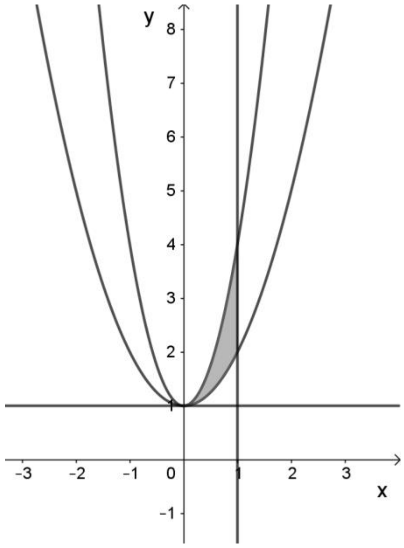
5. Έστω T το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2 + 1$ και $y = 3x^2 + 1$ και την ευθεία $x = 1$.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T.

(2 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του T γύρω από την ευθεία $y = 1$. **(3 μονάδες)**

Λύση:



(α)

$$E = \int_0^1 [3x^2 + 1 - (x^2 + 1)]\, dx$$

$$= \int_0^1 2x^2 dx = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \ \ \tau.\mu.$$

(β)

$$V = \pi \int_0^1 [(3x^2 + 1 - 1)^2 - (x^2 + 1 - 1)^2]\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 8x^4 dx = \pi \left[\frac{8x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{8\pi}{5} \ \ \kappa.\mu.$$

6. Σε ένα καλάθι έχουμε 6 μήλα, x αχλάδια και y ροδάκινα, όπου $x, y \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε τυχαία ένα φρούτο από το καλάθι. Η πιθανότητα να επιλέξουμε αχλάδι ή ροδάκινο είναι $\frac{3}{4}$, ενώ η πιθανότητα να επιλέξουμε μήλο ή ροδάκινο είναι $\frac{7}{12}$.

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y.

(4 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να επιλέξουμε μήλο ή αχλάδι.

(1 μονάδα)

Λύση:

(α) Έστω $A = \{$να επιλέξουμε αχλάδι ή ροδάκινο$\}$ και

$$P(A) = \frac{x+y}{x+y+6} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{x+y}{x+y+6} \Rightarrow 3(x+y) + 18 = 4(x+y)$$

$$\Rightarrow x + y = 18$$

Έστω $B = \{$να επιλέξουμε μήλο ή ροδάκινο$\}$

$$P(B) = \frac{6+y}{x+y+6} \Rightarrow \frac{7}{12} = \frac{6+y}{24} \Rightarrow 6 + y = 14 \ \Rightarrow y = 8$$

και $x = 18 - y = 10$

(β) Έστω $\Gamma = \{$να επιλέξουμε μήλο ή αχλάδι$\}$

$$P(\Gamma) = \frac{6+10}{24} = \frac{2}{3}$$

7. Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{x^2}{\mu+2}+\frac{y^2}{3-\mu}=1, \quad \mu\in\mathbb{R}-\{-2,3\}$$

(α) Να βρείτε για ποια τιμή του μ η εξίσωση παριστάνει κύκλο.

(1 μονάδα)

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση παριστάνει έλλειψη.

(2 μονάδες)

(γ) Αν $\mu\in\left(-2,\frac{1}{2}\right)$, να δείξετε ότι η έλλειψη που προκύπτει έχει τις εστίες της στον άξονα των τεταγμένων.

(2 μονάδες)

Λύση:

(α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο όταν $\mu+2=3-\mu$ και $\mu+2>0$.

$\mu+2=3-\mu \Rightarrow 2\mu=1 \Rightarrow \mu=\frac{1}{2}$

(β) Η εξίσωση παριστάνει έλλειψη όταν
$\mu+2>0$ και $3-\mu>0$ Δηλαδή $\mu>-2$ και $\mu<3$.

Άρα, η εξίσωση παριστάνει έλλειψη όταν $\mu\in(-2,3)$.

(γ) $-2<\mu<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<\mu+2<\frac{5}{2}$ και

$-2<\mu<\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}<-\mu<2\Rightarrow \frac{5}{2}<3-\mu<5$

Άρα $0<\mu+2<\frac{5}{2}<3-\mu$ και επομένως η έλλειψη που προκύπτει έχει τις εστίες της στον άξονα των τεταγμένων.

8. Αν η συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to(1,+\infty)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x)-2f(x)=-e^x$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση:

<u>Α΄ τρόπος</u>

Παραγωγίζουμε τη σχέση δύο φορές

$$\begin{aligned} f^2(x)-2f(x)=-e^x &\Rightarrow 2f'(x)f(x)-2f'(x)=-e^x\\ &\Rightarrow 2f''(x)f(x)+2\,[f'(x)]^2-2f''(x)=-e^x\\ &\Rightarrow 2f''(x)(f(x)-1)=-e^x-2\,[f'(x)]^2\\ &\Rightarrow f''(x)=-\frac{e^x+2[f'(x)]^2}{2(f(x)-1)}\end{aligned}$$

Αφού $f(x)>1$, τότε $f''(x)<0,\ \forall x<0$ και επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

<u>Β΄ τρόπος</u>

$f^2(x) - 2f(x) + 1 = -e^x + 1 \Rightarrow (f(x) - 1)^2 = -e^x + 1$

Δεδομένου ότι $x < 0$ τότε $-e^x + 1 > 0$. Άρα

$$f(x) - 1 = \pm\sqrt{1 - e^x}$$

Δεδομένου ότι $f(x) > 1$ τότε

$$f(x) = 1 + \sqrt{1 - e^x}$$

Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση f δύο φορές

$$f'(x) = -\frac{e^x}{2\sqrt{1 - e^x}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^x\sqrt{1 - e^x} + \dfrac{e^{2x}}{2\sqrt{1 - e^x}}}{\left(\sqrt{1 - e^x}\right)^2} < 0$$

Αφού $f''(x) < 0,\ \forall x < 0$ η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{2}{x} \cdot \ln x$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

(3 μονάδες)

(β) Να δείξετε ότι:

$$\ln x^e \ \leq x,\ \ \forall x > 0$$

(2 μονάδες)

Λύση:

(α) Βρίσκουμε την παράγωγο

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}\ln x + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2}(1 - \ln x)$$

Θέτουμε $f'(x) = 0$. Άρα

$$1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Από τον πιο πάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $(0, e]$ και φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

(β) Από τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το

$f(e) = \frac{2}{e}\ln e = \frac{2}{e}$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} f(x) \leq \frac{2}{e} &\Rightarrow \frac{2}{x} \cdot \ln x \leq \frac{2}{e} \\ &\Rightarrow e\ln x \leq x \\ &\Rightarrow \ln x^e \leq x,\ \ \forall x > 0 \end{aligned}$$

10. Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$I_\nu = \int_0^1 \frac{x^\nu}{x^2+1}\,dx, \qquad \nu \in \{0,1,2,3,\dots\}$$

(α) Να δείξετε ότι $I_{2\nu} = \frac{1}{2\nu-1} - I_{2\nu-2}, \ \ \forall \nu \in \mathbb{N}$.

(3 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_4.

(2 μονάδες)

Λύση:

(α) Αρκεί να δείξουμε ότι $I_{2\nu} + I_{2\nu-2} = \frac{1}{2\nu-1}, \ \ \forall \nu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_{2\nu} + I_{2\nu-2} &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu-2}}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu}+x^{2\nu-2}}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu-2}(x^2+1)}{x^2+1}\,dx \\ &= \int_0^1 x^{2\nu-2}dx = \left[\frac{x^{2\nu-1}}{2\nu-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu-1} \end{aligned}$$

(β) Από την πιο πάνω σχέση

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2\cdot 2-1} - I_2 \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2-1} - I_0\right) \\ &= -\frac{2}{3} + \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= -\frac{2}{3} + [\tau o\xi\varepsilon\varphi x]_0^1 \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄</u> Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = (1-x)e^{2x}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της, αν υπάρχουν, και να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση:

<u>Πεδίο Ορισμού</u>

$A = \mathbb{R}$,

<u>Σημεία τομής με τους άξονες</u>

Αν $x = 0 \Longrightarrow y = 1$ και

αν $y = 0 \Longrightarrow x = 1$

Τα σημεία τομής είναι $(0,1)$ και $(1,0)$

<u>Μονοτονία</u>

$f'(x) = -e^{2x} + 2(1-x)e^{2x}$

$= e^{2x}(1-2x)$

Για $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, \frac{1}{2}]$

Φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{1}{2}, +\infty)$

Τοπικά ακρότατα

Το τοπικό (ολικό) μέγιστο είναι το $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{2}$, max$\left(\frac{1}{2},\frac{e}{2}\right)$

Ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=(-\infty)(+\infty)=-\infty$$

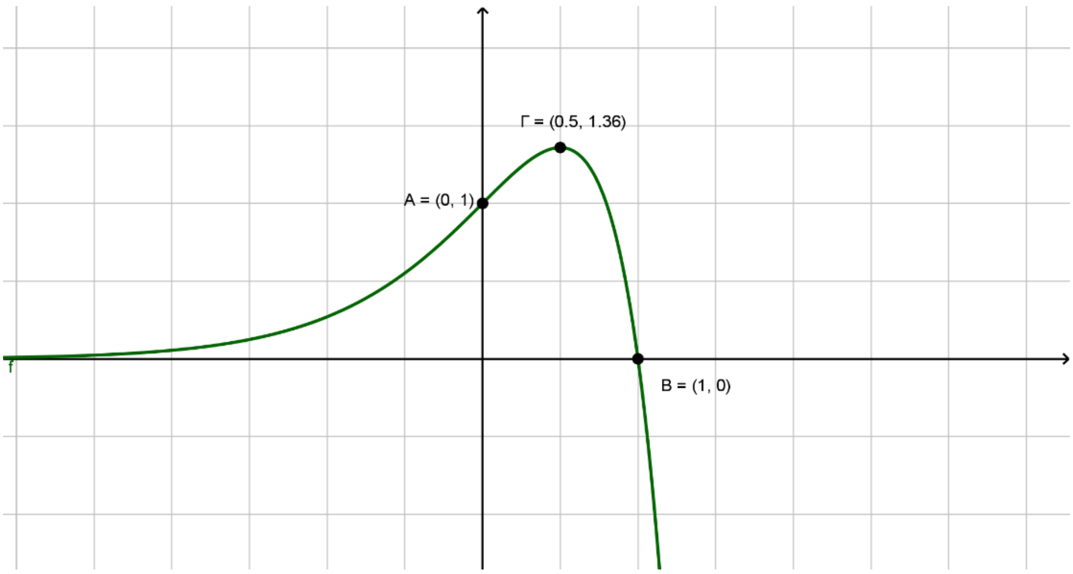
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x}=+\infty \end{cases}$ ⇒ Απροσδιοριστία της μορφής $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

$$\text{De L' Hospital: } \lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{e^{-2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-2e^{-2x}}=0$$

Άρα,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$, την ευθεία $y=0$.



2. Έστω M τυχαίο σημείο της παραβολής $y^2 = 4\alpha x$ με $\alpha > 0$ και O η αρχή των αξόνων. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία (ε_1) παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής η οποία τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο K. Στη συνέχεια, από το σημείο K φέρουμε ευθεία (ε_2) η οποία τέμνει κάθετα το ευθύγραμμο τμήμα OM στο σημείο T.

(α) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε_2) διέρχεται από σταθερό σημείο του άξονα των τετμημένων.

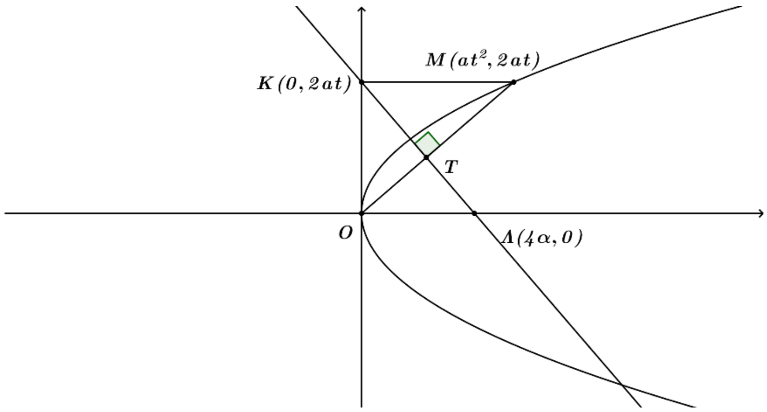
(4 μονάδες)

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου T, καθώς το M κινείται στην παραβολή, είναι κύκλος.

(6 μονάδες)

Λύση:

(α)



Θεωρούμε $M(\alpha t^2, 2\alpha t)$ με $t \neq 0$.

Κλίση της OM: $\lambda_{OM} = \frac{2at}{at^2} = \frac{2}{t}$

Κλίση της KT: $\lambda_{KT} = -\frac{t}{2}$

Εξίσωση της KT: $y - 2at = -\frac{t}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{t}{2}x + 2at \quad (\mathbf{1})$

Για $y = 0$ από την $(\mathbf{1}) \Rightarrow x = 4a$, άρα το σημείο $\Lambda(4\alpha, 0)$ είναι σταθερό.

(β) Εξίσωση της OM: $y = \frac{2}{t}x \quad (\mathbf{2})$ και

Εξίσωση της $K\Lambda$: $y = -\frac{t}{2}(x - 4a) \Rightarrow 2y = -tx + 4at \quad (\mathbf{3})$

Από τις $(\mathbf{2}) \wedge (\mathbf{3}) \Rightarrow 2y = -\frac{2x}{y}(x - 4a) \Rightarrow y^2 + x^2 - 4ax = 0 \Rightarrow$

$$(x - 2a)^2 + y^2 = 4a^2$$

Άρα είναι κύκλος με κέντρο $(2\alpha, 0)$ και ακτίνα $R = 2a$

3. Σε ένα διαγωνισμό δεξιοτήτων οι διαγωνιζόμενοι θα περάσουν από 5 στάδια δοκιμασίας. Η πιθανότητα ένας διαγωνιζόμενος να πετύχει σε ένα οποιοδήποτε στάδιο είναι $\frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

(α) $A = \{$ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε τρία ακριβώς στάδια$\}$

(4 μονάδες)

(β) $B = \{$ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε τρία ακριβώς συνεχόμενα στάδια$\}$

(3 μονάδες)

(γ) $\Gamma = \{$ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε ένα τουλάχιστον στάδιο$\}$

(3 μονάδες)

Λύση:

(α)

$$P(A) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{128}{625}$$

(β)

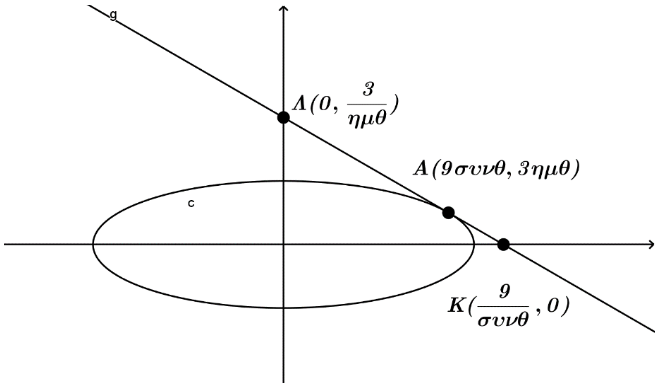
$$P(B) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{3!}{2!} = \frac{192}{3125}$$

(γ)

$$P(\Gamma) = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{3124}{3125}$$

4. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1$ και ένα σημείο της $A(9συνθ, 3ημθ)$ στο πρώτο τεταρτημόριο. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο A τέμνει τους άξονες των τετμημένων και τεταγμένων στα σημεία K και $Λ$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την τιμή του $θ$ για την οποία το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $KΛ$ είναι ελάχιστο.

Λύση:



$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow \frac{2x}{81}+\frac{2yy'}{9}=0 \Rightarrow y'=-\frac{9x}{81y}$$

Επομένως $λ_{εφ}=-\frac{3συνθ}{9ημθ}$

Εξίσωση εφαπτομένης: $9yημθ+3xσυνθ=27$.

Για $x=0 \Rightarrow y=\frac{3}{ημθ} \Rightarrow Λ\left(0,\frac{3}{ημθ}\right)$

Για $y=0 \Rightarrow x=\frac{9}{συνθ} \Rightarrow K\left(\frac{9}{συνθ},0\right)$

$$(KΛ)=\sqrt{\left(\frac{9}{συνθ}\right)^2+\left(\frac{3}{ημθ}\right)^2} \Rightarrow$$

$$(KΛ)=\sqrt{81τεμ^2θ+9στεμ^2θ} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dθ}(KΛ)=\frac{81\cdot 2τεμ^2θεφθ-9\cdot 2στεμ^2θσφθ}{2\sqrt{81τεμ^2θ+9στεμ^2θ}}$$

$$\frac{d}{dθ}(KΛ)=0 \Rightarrow θ=τοξεφ\sqrt{\frac{3}{9}}$$

$$\Rightarrow θ=\frac{π}{6}$$

$θ$	0		$\frac{π}{6}$		$\frac{π}{2}$
$\frac{d}{dθ}(KΛ)$		$-$	0	$+$	
$(KΛ)$		↘		↗	

Από τον πιο πάνω πίνακα συμπεραίνουμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $KΛ$ είναι ελάχιστο όταν $θ=\frac{π}{6}$

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 2\alpha - x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{2\alpha} f(2\alpha - x)dx = \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$$

(4 μονάδες)

(β) Αν $f(x) + f(2\alpha - x) = 2\beta,\ \forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$\int_{0}^{2\alpha} f(x)\,dx = 2\alpha\beta$$

(4 μονάδες)

(γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{0}^{4} [(x-2)^{2018} \cdot \text{ημ}^{2019}(x-2) + 3]dx$$

(2 μονάδες)

Λύση:

(α) $du = -dx$ και για $x = \alpha \Rightarrow u = \alpha$ και για $x = 2\alpha \Rightarrow u = 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha}^{2\alpha} f(2\alpha - x)dx &= \int_{\alpha}^{0} f(u)(-du) \\
&= -\int_{\alpha}^{0} f(u)du \\
&= \int_{0}^{\alpha} f(u)du \\
&= \int_{0}^{\alpha} f(x)dx
\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{2\alpha} f(x)\,dx &= \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} f(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} [2\beta - f(2\alpha - x)]dx \\
&= \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{2\alpha} 2\beta\,dx - \int_{\alpha}^{2\alpha} f(2\alpha - x)\,dx \\
&= \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx + [2\beta x]_{\alpha}^{2\alpha} - \int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx \\
&= 2\beta(2\alpha - \alpha) = 2\alpha\beta
\end{aligned}$$

(γ) Η $f(x) = (x-2)^{2018} \cdot ημ^{2019}(x-2) + 3$ και $\alpha = 2$

$$\begin{aligned} f(4-x) &= (4-x-2)^{2018} \cdot ημ^{2019}(4-x-2) + 3 \\ &= (2-x)^{2018} \cdot ημ^{2019}(2-x) + 3 \\ &= -(x-2)^{2018} \cdot ημ^{2019}(x-2) + 3 \end{aligned}$$

Άρα

$f(x) + f(4-x) =$

$(x-2)^{2018} \cdot ημ^{2019}(x-2) + 3 - (x-2)^{2018} \cdot ημ^{2019}(x-2) + 3 = 6$

Συνεπώς, $2\beta = 6 \Rightarrow \beta = 3$

$$\int_0^4 [(x-2)^{2018} \cdot ημ^{2019}(x-2) + 3]dx = 2\alpha\beta = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$