ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 2 Ιουνίου 2015

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{e^{\chi}-1}{3\chi+\eta\mu\chi}$ **Λύση** Είναι, $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(e^{\chi}-1\right)=0$ και $\lim\limits_{\chi\to 0}\left(3\chi+\eta\mu\chi\right)=0$. Άρα έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα De L' Hospital: $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{e^{\chi}-1}{3\chi+\eta\mu\chi}=\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{e^{\chi}}{3+\sigma\upsilon\nu\chi}=\dfrac{1}{4}$	
2.	Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int(3\chi^2+\sigma\upsilon\nu\chi+1)d\chi$ **Λύση** $\int(3\chi^2+\sigma\upsilon\nu\chi+1)dx=\chi^3+\eta\mu\chi+\chi+c$	
3.	Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}5 & -4\\ -2 & 9\end{pmatrix}$ Να δείξετε ότι $A^2+A^{-1}=A+B$ **Λύση** $A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -8\\ -4 & 11\end{pmatrix}$ $A^2+A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -8\\ -4 & 11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -6\\ -3 & 12\end{pmatrix}$ $A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & -4\\ -2 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -6\\ -3 & 12\end{pmatrix}$ *Άρα* $A^2+A^{-1}=A+B$	

4. Δίνονται τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 5, 6, 9.

Να βρείτε:

α. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω ψηφία, αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου.

β. Πόσοι από τους πιο πάνω τριψήφιους αριθμούς:

i. Είναι μεγαλύτεροι του 300

ii. Διαιρούνται με το 5

Λύση

α)

Ε	Δ	Μ
6	6	5

6.6.5=180 αριθμούς

β) i)

Ε	Δ	Μ
4	6	5

4.6.5=120 αριθμούς

ii) ψηφίο μονάδων 0

Ε	Δ	Μ
5	6	1

5.6.1=30

ψηφίο μονάδων 5

Ε	Δ	Μ
5	5	1

5.5.1=25

Σύνολο : 30+25=55 αριθμοί

5. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{12}$, να υπολογίσετε: α.

Τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $P(B)$, $P(A-B)$ και $P(A'\cup B)$.

β. Την πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί το Α,

δεδομένου ότι δεν πραγματοποιήθηκε το Β.

Λύση

α) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{12} \Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{12}$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)$$

$$=1-P(A)+P(B)-P(B)+P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

β) $$P(A/B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{7}{12}}=\frac{5}{7}$$

6. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, αν το σημείο καμπής της συνάρτησης $f(\chi)=\chi^3-6\chi^2+14$, είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης $g(\chi)=\chi^2+\alpha\chi+\beta$

Λύση

$$f(\chi)=\chi^3-6\chi^2+14 \Rightarrow f'(\chi)=3\chi^2-12\chi \Rightarrow f''(\chi)=6\chi-12$$

$$\Rightarrow f''(\chi)=0 \text{ όταν } \chi=2$$

Για $\chi=2 \Rightarrow \psi=-2 \Rightarrow$ Σ.Κ.$(2,-2)$

χ		2	
f''(x)	-	0	+
f(χ)	⌒	Σ.Κ	⌣

$$g'(\chi)=2\chi+\alpha \Rightarrow g'(2)=0 \Rightarrow 4+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=-4$$

$$g(2)=-2 \Rightarrow 4-8+\beta=-2 \Leftrightarrow \beta=2$$

7. α. Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

β. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$, $\alpha>\beta$ με εστίες Ε και Ε΄ και Β το σημείο τομής της έλλειψης με τον θετικό ημιάξονα Οψ.
Αν το τρίγωνο ΒΕΕ΄ είναι ισόπλευρο, να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

Λύση

α) Ορισμός

Έλλειψη είναι ο **γεωμετρικός τόπος σημείου του επιπέδου**, που κινείται έτσι ώστε **οι αποστάσεις του από δύο σταθερά σημεία Ε και Ε΄** του επιπέδου **να έχουν άθροισμα σταθερό**.
Δηλαδή αν Τ είναι τυχαίο σημείο της έλλειψης και 2α (α>0) το σταθερό άθροισμα τότε (ΤΕ)+(ΤΕ΄)=2α.

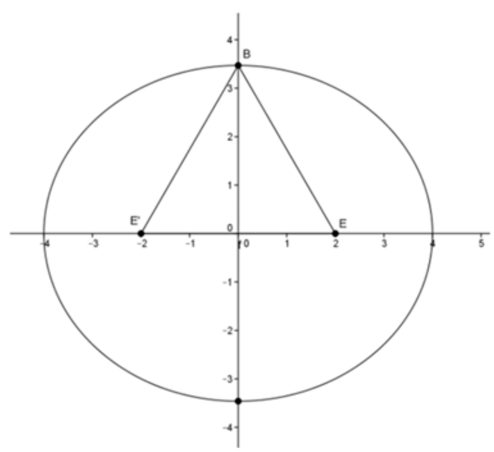
β) (ΒΕ)+(ΒΕ΄)=2α

(ΕΕ΄) = 2γ

(ΒΕ) = (ΒΕ΄) = (ΕΕ΄)

Άρα α=2γ

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma}{2\gamma}=\frac{1}{2}$$

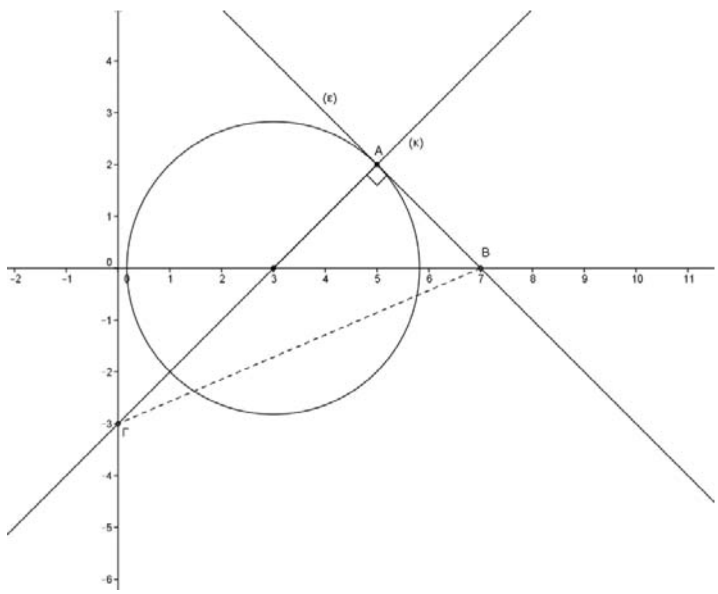


8. Δίνεται ο κύκλος $\chi^2+\psi^2-6\chi+1=0$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) και την εξίσωση της κάθετης (κ) του κύκλου στο σημείο του Α(5,2)

β. Αν η (ε) τέμνει τον άξονα χ΄χ στο σημείο Β και η (κ) τον άξονα ψ΄ψ στο σημείο Γ, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ.

Λύση



$$\alpha)\ \chi^2+\psi^2-6\chi+1=0 \Rightarrow 2\chi+2\psi\frac{d\psi}{d\chi}-6=0 \Leftrightarrow \frac{d\psi}{d\chi}=\frac{6-2\chi}{2\psi} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}=-1$$

$$\text{εξίσωση εφαπτομένης}: \psi-2=-1(x-5) \Rightarrow \chi+\psi=7$$

$$\lambda_{\kappa\alpha\theta}=1 \quad \text{Άρα εξίσωση καθετης}: \psi-2=1(x-5) \Rightarrow \chi-\psi=3$$

$$\beta)\quad \chi+\psi=7$$

$$\psi=0 \Rightarrow \chi=7 \Rightarrow B(7,0)$$

$$\chi-\psi=3$$

$$\chi=0 \Rightarrow \psi=-3 \Rightarrow \Gamma(0,-3)$$

$$\text{Επειδή } B\hat{A}\Gamma=90^0 \text{ το } B\Gamma \text{ διάμετρος του κύκλου} \Rightarrow K \text{ μέσο της } B\Gamma \Rightarrow K(\frac{7}{2},-\frac{3}{2})$$

$$(B\Gamma)=2R=\sqrt{(7-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{58} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{58}}{2}$$

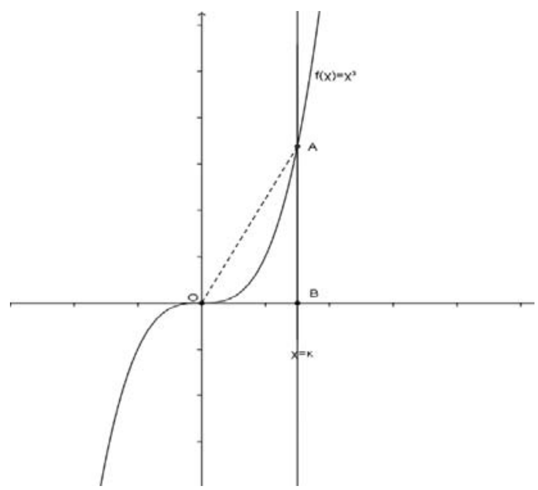
$$(\chi-\frac{7}{2})^2+(\psi+\frac{3}{2})^2=\frac{58}{4}$$

9. α. Δίνεται η καμπύλη $f(\chi)=\chi^3$ και σημείο $B(\kappa,0)$ με $\kappa>0$. Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των ψ, η οποία τέμνει την καμπύλη στο σημείο Α. Να δείξετε ότι η καμπύλη f(χ) χωρίζει το τρίγωνο ΟΑΒ (Ο η αρχή των αξόνων) σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

β. Έστω Τ το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, την ευθεία ΑΒ και τον άξονα των χ .Το χωρίο Τ όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα χ΄χ δημιουργεί στερεό με όγκο V_χ , ενώ όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα ψ΄ψ δημιουργεί στερεό με όγκο V_ψ.

Αν $V_x=\dfrac{10}{7}V_\psi$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

<u>Λύση</u>



$$\alpha)\ E_{\text{Τριγ.OAB}}=\frac{(OB)(BA)}{2}=\frac{\kappa\cdot\kappa^3}{2}=\frac{\kappa^4}{2}\ \tau.\mu.$$

$$E_{OAB}=\int_0^\kappa \psi_\kappa\,dx=\int_0^\kappa x^3\,dx=\frac{\kappa^4}{4}\ \tau.\mu.$$

$$E_{OAB}=\frac{1}{2}E_{\text{Τριγ.OAB}}\Rightarrow \text{Τα δύο χωρία είναι ισεμβαδικά.}$$

$$\beta)\ V_\chi=\pi\int_0^\kappa x^6\,dx=\pi\frac{\kappa^7}{7}\ \kappa.\mu.$$

$$V_\psi=\pi\int_0^{\kappa^3}(\kappa^2-\psi^{\frac{2}{3}})d\psi=\pi\left(\kappa^2\psi-\frac{3\psi^{\frac{5}{3}}}{5}\right)_0^{\kappa^3}=\pi\left(\kappa^5-\frac{3\kappa^5}{5}\right)=\pi\frac{2\kappa^5}{5}\ \kappa.\mu.$$

Άρα $\pi\dfrac{\kappa^7}{7}=\dfrac{10}{7}\pi\dfrac{2\kappa^5}{5}\Leftrightarrow\kappa^2=4\Leftrightarrow\kappa=\pm2\Rightarrow\kappa=2\ \ (\kappa>0)$

Συνεπώς το σημείο είναι το *Α*(2, 8)

10.	Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0)=0$ και $f'(\chi)=\dfrac{\chi^2+1}{\chi^4+\chi^2+2}$ για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$ α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $g(\chi)=f(\chi)-\chi$ β. Να αποδείξετε ότι $0<f(\chi)<\chi$ για κάθε $\chi>0$ **<u>Λύση</u>** α) $g(\chi)=f(\chi)-\chi \Rightarrow g'(\chi)=f'(\chi)-1 \Rightarrow$ $\Rightarrow g'(\chi)=\dfrac{\chi^2+1}{\chi^4+\chi^2+2}-1=\dfrac{-\chi^4-1}{\chi^4+\chi^2+2}=\dfrac{-(\chi^4+1)}{\chi^4+\chi^2+2}<0$ άρα g γνησίως φθίνουσα. β) $\chi>0$ και g γνησίως φθίνουσα έχουμε $g(\chi)<g(0) \Rightarrow g(\chi)<f(0)-0$ $f(\chi)-\chi<0 \Rightarrow f(\chi)<\chi$ $f'(\chi)=\dfrac{\chi^2+1}{\chi^4+\chi^2+2}>0$ $(\chi^2+1>0$ και $\chi^4+\chi^2+2>0)$ άρα f γνησίως αύξουσα. $\chi>0 \Rightarrow f(\chi)>f(0)\Rightarrow f(\chi)>0$ Άρα $\forall\chi>0,\ 0<f(\chi)<\chi$	

ΜΕΡΟΣ Β΄

1.	Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(\chi)=\dfrac{\chi}{\chi^2-5\chi+4}$ Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά. **<u>Λύση</u>** α) <u>Πεδίο ορισμού</u>: $A=\mathbb{R}-\{1,4\}$ <u>Σημεία τομής με άξονες συντεταγμένων</u>: $O(0,0)$ <u>Μονοτονία-ακρότατα</u>:Παραγωγίζοντας την συνάρτηση $f(\chi)=\dfrac{\chi}{\chi^2-5\chi+4}$, έχουμε $f'(x)=\dfrac{\chi^2-5\chi+4-\chi(2\chi-5)}{(\chi-1)^2(\chi-4)^2}=\dfrac{-\chi^2+4}{(\chi-1)^2(\chi-4)^2}$ $f'(\chi)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-\chi^2+4}{(\chi-1)^2(\chi-4)^2}=0 \Leftrightarrow \chi=\pm 2$ Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.	

x	$-\infty$		-2		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$		↘	min $(-2,-\frac{1}{9})$	↗	‖	↗	max $(2,-1)$	↘	‖	↘	

Η f είναι

- Γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-2,1)$, $(1,2]$ και
- Γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$, $[2,4)$, $(4,+\infty)$

Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-2)=-\frac{1}{9}$ και

τοπικό μέγιστο το $f(2)=-1$.

<u>Ασύμπτωτες:</u>

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-5x+4}=0$ και

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-5x+4}=0$

Άρα έχουμε οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi=0$

- $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x}{(x-1)(x-4)}=+\infty$

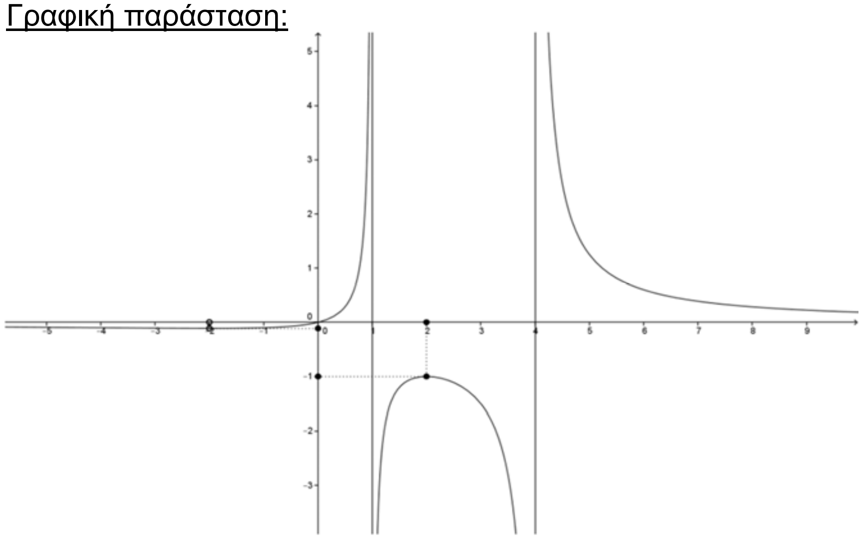
  $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x}{(x-1)(x-4)}=-\infty$

  $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}\frac{x}{(x-1)(x-4)}=-\infty$

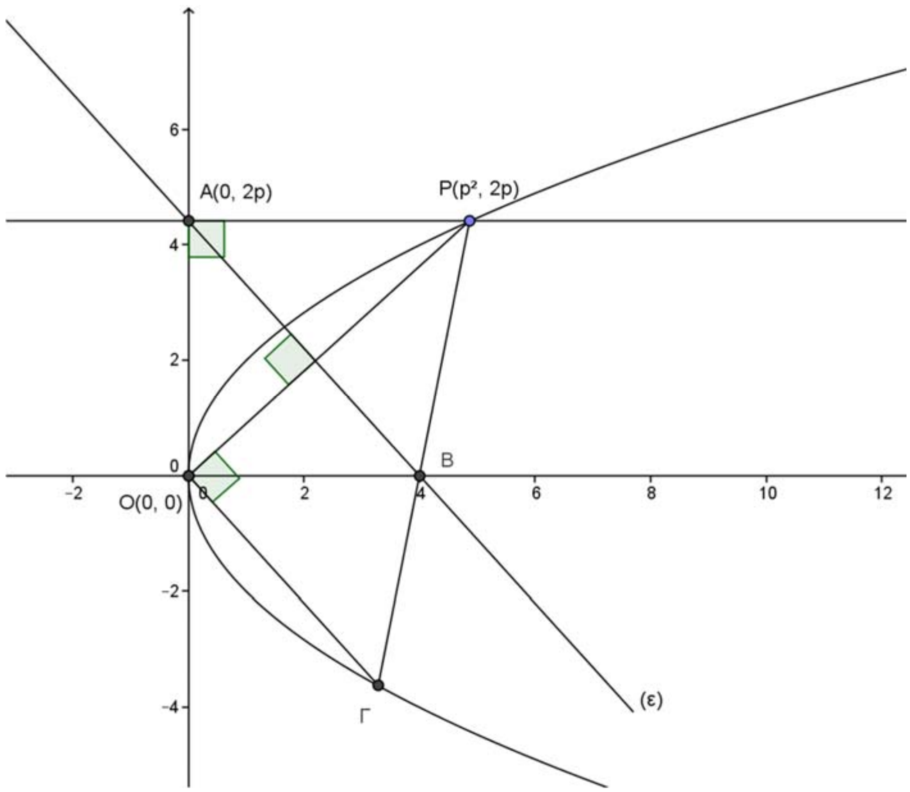
  $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}\frac{x}{(x-1)(x-4)}=+\infty$

Άρα έχουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=1, x=4$

<u>Γραφική παράσταση:</u>



2.	Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\chi$ και το σημείο της $P(p^2, 2p), p>0$. Φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα PA κάθετο στον άξονα Οψ (Α σημείο του άξονα Οψ). Από το Α φέρουμε ευθεία (ε) κάθετη στην OP (O η αρχή των αξόνων). α. Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον άξονα Οχ σε σταθερό σημείο Β. β. Αν Γ σημείο της παραβολής τέτοιο ώστε η ΓΟ να είναι κάθετη στην PO, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου POΓ είναι $E = 4p + \frac{16}{p}$ γ. Να βρείτε για ποια τιμή του p το πιο πάνω εμβαδόν Ε, γίνεται ελάχιστο. **<u>Λύση</u>** α. Είναι, Α(0, 2p) και $\lambda_{OP} = \frac{2p}{p^2} = \frac{2}{p} \Rightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{p}{2}$. εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $\psi - 2p = -\frac{p}{2}\chi$, απ' όπου για $\psi = 0$ παίρνουμε $\chi = 4$. Δηλαδή η (ε) τέμνει τον άξονα Οχ στο σταθερό σημείο Β(4, 0). β. Η ευθεία ΟΓ έχει εξίσωση $\psi = -\frac{p}{2}\chi$ και επιλύοντας σύστημα με την παραβολή, βρίσκουμε ότι $\Gamma\left(\frac{16}{p^2}, -\frac{8}{p}\right)$ $E_{PO\Gamma} = \frac{1}{2}(O\Gamma)(OP) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{256}{p^4} + \frac{64}{p^2}} \cdot \sqrt{p^4 + 4p^2} = \frac{4(p^2+4)}{p} = 4p + \frac{16}{p}$ γ. Έχουμε, $E = 4p + \frac{16}{p}$, $p>0$ $$\frac{dE}{dp} = 4 - \frac{16}{p^2} = \frac{4(p^2-4)}{p^2}$$ $$\frac{dE}{dp} = 0 \Leftrightarrow p = 2 \quad (p>0)$$ $\frac{d^2E}{dp^2} = \frac{32}{p^3}$, απ' όπου $\left.\frac{d^2E}{dp^2}\right\vert_{p=2} = \frac{32}{2^3} = 4 > 0$, άρα το εμβαδόν Ε γίνεται ελάχιστο για $p = 2$	



A(0, 2p)
P(p², 2p)
B
O(0, 0)
Γ
(ε)
6
4
2
0
−2
−4
−2
2
4
6
8
10
12

3. Στον τελικό του πρωταθλήματος καλαθόσφαιρας ανδρών, προκρίθηκαν οι ομάδες Α και Β.

Η ομάδα Α έχει πιθανότητα $\frac{2}{3}$ να κερδίσει την ομάδα Β σε κάθε αγώνα. Το πρωτάθλημα θα το κερδίσει η ομάδα που θα κερδίσει πρώτη τρεις αγώνες.
α. Να βρείτε την πιθανότητα η ομάδα Α να κερδίσει το πρωτάθλημα.
β. Αν η ομάδα Α κέρδισε το πρωτάθλημα, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η ομάδα Β να κέρδισε μόνο στον πρώτο αγώνα.

Λύση

α. Προφανώς για την ανάδειξη της πρωταθλήτριας ομάδας θα γίνουν τουλάχιστον 3 αγώνες και το πολύ 5 αγώνες.
Αν Α είναι το ενδεχόμενο
«Το πρωτάθλημα κερδίζει η ομάδα Α», έχουμε τις περιπτώσεις:

- Με 3 αγώνες η πιθανότητα είναι $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
- Με 4 αγώνες η πιθανότητα είναι $\binom{3}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$
- Με 5 αγώνες η πιθανότητα είναι $\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$.

Τελικά,

$$P(A)=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\binom{3}{1}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{64}{81}$$

β. Έστω Ε το ενδεχόμενο
«Η ομάδα Β κερδίζει μόνο στον πρώτο αγώνα».
Τότε ζητούμε την πιθανότητα $P(E/A)$:

$$P(E/A)=\frac{P(E\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\frac{64}{81}}=\frac{1}{8}$$

4. Η κάθετη της υπερβολής $\chi\psi = c^2$ στο σημείο της $A(ct,\frac{c}{t}),\ t>0,\ t\neq 1$ τέμνει την υπερβολή στο σημείο $B(cp,\frac{c}{p})$

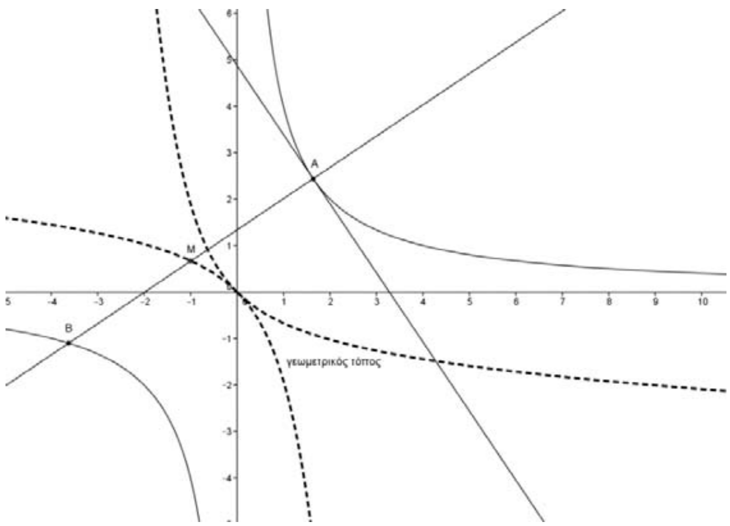
Να δείξετε ότι:

α. $t^3 \cdot p = -1$

β. Η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ΑΒ είναι $c^2(\chi^2-\psi^2)^2 = -4\chi^3\psi^3$

<u>**Λύση**</u>

α.



$$\left.\begin{array}{r} \chi\psi = c^2 \quad , \quad A(ct,\frac{c}{t}) \\ \psi + \chi\psi' = 0 \Leftrightarrow \psi' = -\frac{\psi}{\chi} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi} = -\frac{\frac{c}{t}}{ct} = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow \lambda_{\kappa\alpha\theta} = t^2$$

Εξίσωση κάθετης: $\psi - \frac{c}{t} = t^2(\chi - ct) \Leftrightarrow t\psi - c = t^3\chi - ct^4$

$$\left.\begin{array}{r} t\psi = t^3\chi - ct^4 + c \\ \psi = \frac{c^2}{\chi} \end{array}\right\} \Rightarrow t\cdot\frac{c^2}{\chi} = t^3\chi - ct^4 + c \Leftrightarrow t^3\chi^2 + (c - ct^4)\chi - c^2t = 0$$

$$\chi_{1,2} = \frac{ct^4 - c \pm \sqrt{(c-ct^4)^2 - 4\cdot t^3\cdot(-c^2t)}}{2t^3}$$

$$= \frac{ct^4 - c \pm \sqrt{c^2 - 2ct^4 + c^2t^8 + 4c^2t^4}}{2t^3} = \frac{ct^4 - c \pm \sqrt{c^2 + 2ct^4 + c^2t^8}}{2t^3}$$

$$= \frac{ct^4 - c \pm \sqrt{(c + ct^4)^2}}{2t^3} = \frac{ct^4 - c \pm (c + ct^4)}{2t^3}$$

$$\chi_1 = \frac{ct^4 - c + c + ct^4}{2t^3} = \frac{2ct^4}{2t^3} = ct \ \rightarrow \ A$$

$$\chi_2 = \frac{ct^4 - c - c - ct^4}{2t^3} = \frac{-2c}{2t^3} = -\frac{c}{t^3} \ \overset{\chi\psi=c^2}{\Rightarrow} \ \psi = \frac{c^2}{-\frac{c}{t^3}} = -ct^3$$

$$\left.\begin{array}{r} B(-\frac{c}{t^3}, -ct^3) \\ B(cp, \frac{c}{p}) \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{c}{t^3} = cp \Leftrightarrow pt^3 = -1$$

2ος τρόπος: $\lambda_{AB} = \lambda_{\kappa\alpha\theta} \Rightarrow \dfrac{\frac{c}{t} - \frac{c}{p}}{ct - cp} = t^2 \Leftrightarrow \dfrac{\frac{cp - ct}{tp}}{c(t - p)} = t^2$

$$\frac{c(p - t)}{ctp(t - p)} = t^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{tp} = t^2 \Leftrightarrow t^3 p = -1$$

3ος τρόπος:

$$\left.\begin{array}{r} \text{Εξίσωση κάθετης}: t\psi - c = t^3\chi - ct^4 \\ B(cp, \frac{c}{p}) \end{array}\right\} \Rightarrow t \cdot \frac{c}{p} - c = t^3 \cdot cp - ct^4$$

$$ct - cp = ct^3p^2 - ct^4p \Leftrightarrow c(t - p) = ct^3p(p - t) \ \Leftrightarrow t^3p = -1$$

β. $M\left(\dfrac{ct - \frac{c}{t^3}}{2}, \dfrac{\frac{c}{t} - ct^3}{2}\right) \ \Rightarrow M\left(\dfrac{ct^4 - c}{2t^3}, \dfrac{c - ct^4}{2t^3}\right)$ 1

$$\left.\begin{array}{l}\chi=\dfrac{c(t^4-1)}{2t^3}\\ \psi=\dfrac{c(1-t^4)}{2t}\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{\chi}{\psi}=\dfrac{\dfrac{c(t^4-1)}{2t^3}}{\dfrac{c(1-t^4)}{2t}}\Leftrightarrow \dfrac{\chi}{\psi}=-\dfrac{1}{t^2}\Leftrightarrow t^2=-\dfrac{\psi}{\chi}$$

$$\left.\begin{array}{l}\psi=\dfrac{c(1-t^4)}{2t}\\ t^2=-\dfrac{\psi}{\chi}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\psi^2=\dfrac{c^2(1-t^4)^2}{4t^2}\\ t^2=-\dfrac{\psi}{\chi}\end{array}\right\}\Rightarrow \psi^2=\dfrac{c^2(1-\dfrac{\psi^2}{\chi^2})^2}{4(-\dfrac{\psi}{\chi})}$$

$$\psi^2=\dfrac{\dfrac{c^2(\chi^2-\psi^2)^2}{\chi^4}}{-\dfrac{4\psi}{\chi}}\Leftrightarrow \psi^2=\dfrac{c^2(\chi^2-\psi^2)^2}{-4x^3\psi}\Leftrightarrow c^2(\chi^2-\psi^2)^2=-4x^3\psi^3$$

5. α. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\chi=\alpha+\beta-u$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-\chi)d\chi$$

β. Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(\chi+3)}{\ln(\chi+3)+\ln(4-\chi)}d\chi=\frac{1}{2}$

γ. Αν $f(\chi)=\dfrac{\chi^2+1}{e^{\chi}+1}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f(\chi)+f(-\chi)=\chi^2+1,\ \ \forall\ \chi\in\mathbb{R}$

ii. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(\chi)d\chi=\frac{4}{3}$

Λύση

α. Είναι, $\chi=\alpha+\beta-u\Rightarrow d\chi=-du$

$\chi=\alpha\ \Rightarrow\ u=\beta\quad,\quad \chi=\beta\ \Rightarrow\ u=\alpha$

Άρα $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=-\int_{\beta}^{\alpha} f(\alpha+\beta-u)du=\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-\chi)d\chi$

β. $f(\chi)=\dfrac{\ln(\chi+3)}{\ln(\chi+3)+\ln(4-\chi)}$

$$f(0+1-\chi)=\frac{\ln(4-\chi)}{\ln(4-\chi)+\ln(\chi+3)}$$

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(\chi+3)}{\ln(\chi+3)+\ln(4-\chi)}\,d\chi=\int_0^1 \frac{\ln(4-\chi)}{\ln(4-\chi)+\ln(\chi+3)}\,d\chi$$

$$2\cdot I=\int_0^1 \frac{\ln(\chi+3)}{\ln(\chi+3)+\ln(4-\chi)}\,d\chi+\int_0^1 \frac{\ln(4-\chi)}{\ln(4-\chi)+\ln(\chi+3)}\,d\chi$$

Άρα

$$=\int_0^1\left[\frac{\ln(\chi+3)}{\ln(\chi+3)+\ln(4-\chi)}+\frac{\ln(4-\chi)}{\ln(4-\chi)+\ln(\chi+3)}\right]d\chi=\int_0^1 d\chi=[\chi]_0^1=1$$

$$I=\frac{1}{2}$$

γ.

$$f(\chi)=\frac{\chi^2+1}{e^\chi+1}$$

$$f(\chi)+f(-\chi)=\frac{\chi^2+1}{e^\chi+1}+\frac{\chi^2+1}{e^{-\chi}+1}=\frac{\chi^2+1}{e^\chi+1}+\frac{\chi^2+1}{\frac{1}{e^\chi}+1}=\frac{(\chi^2+1)(e^\chi+1)}{e^\chi+1}=\chi^2+1$$

$$f(-1+1-x)=f(-\chi)$$

$$\int_{-1}^{1} f(\chi)d\chi=\int_{-1}^{1} f(-\chi)d\chi$$

$$\int_{-1}^{1} f(\chi)d\chi+\int_{-1}^{1} f(-\chi)d\chi=\int_{-1}^{1}(\chi^2+1)dx$$

$$2\int_{-1}^{1} f(\chi)d\chi=\left[\frac{\chi^3}{3}+\chi\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} f(\chi)d\chi=\frac{4}{3}$$