

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ**  
**ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**  
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**


**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2015**

**Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**2-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ**

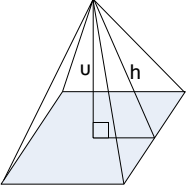
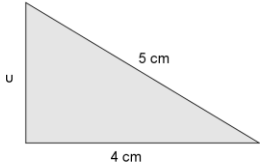
**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή, 5 Ιουνίου 2015**  
**8:00 – 11:00**

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

**ΜΕΡΟΣ Α΄**

<b>1.</b>	<p>Να υπολογίσετε τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις 2 m, 10 m και 4 m.</p> <p><b>Λύση:</b> <math>V = E_{\beta} \cdot u = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 2 \cdot 10 \cdot 4 = 80 \text{ m}^3</math></p>											
<b>2.</b>	<p>Στο διπλανό κυκλικό διάγραμμα φαίνεται η κατανομή των μαθητών μιας Τεχνικής Σχολής σε κλάδους.</p> <p>Να βρείτε:</p> <p>(α) Το ποσοστό (%) των μαθητών που επέλεξαν τον κλάδο της Κομμωτικής.</p> <p>(β) Τον κλάδο που επέλεξαν οι περισσότεροι μαθητές.</p> <p><b>Λύση:</b></p> <p>(α) <math>100 - (20 + 30 + 35) = 100 - 85 = 15\%</math></p> <p>(β) Οι περισσότεροι μαθητές επέλεξαν τον κλάδο της Μηχανολογίας</p>	 <table border="1"><caption>Κατανομή μαθητών σε κλάδους</caption><thead><tr><th>Κλάδος</th><th>Ποσοστό (%)</th></tr></thead><tbody><tr><td>Μηχανολογία</td><td>35%</td></tr><tr><td>Ηλεκτρολογία</td><td>30%</td></tr><tr><td>Κομμωτική</td><td>20%</td></tr><tr><td>Άλλος κλάδος</td><td>15%</td></tr></tbody></table>	Κλάδος	Ποσοστό (%)	Μηχανολογία	35%	Ηλεκτρολογία	30%	Κομμωτική	20%	Άλλος κλάδος	15%
Κλάδος	Ποσοστό (%)											
Μηχανολογία	35%											
Ηλεκτρολογία	30%											
Κομμωτική	20%											
Άλλος κλάδος	15%											
<b>3.</b>	<p>Η Ελένη, κατά τη φετινή σχολική χρονιά, πήρε τους ακόλουθους βαθμούς στα διαγωνίσματα των Μαθηματικών: 15, 17, 18, 11 και 19. Να βρείτε το μέσο όρο της βαθμολογίας της.</p> <p><b>Λύση:</b> <math>\bar{x} = \frac{15 + 17 + 18 + 11 + 19}{5} = \frac{80}{5} = 16</math></p>											

4.	<p>Τετραγωνικό πρίσμα έχει ύψος 9 cm και ακμή βάσης 6 cm.          Να βρείτε:</p> <p>(α) Το εμβαδόν της παράπλευρης του επιφάνειας.          (β) Τον όγκο του πρίσματος.</p> <p><b>Λύση:</b></p> <p>(α) <math>E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot u = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 24 \cdot 9 = 216 \text{ cm}^2</math></p> <p>(β) <math>V = E_{\beta} \cdot u = 6^2 \cdot 9 = 36 \cdot 9 = 324 \text{ cm}^3</math></p>							
5.	<p>Η τιμή πώλησης ενός ηλεκτρονικού παιχνιδιού είναι €400 χωρίς Φ.Π.Α. Να βρείτε πόσο θα κοστίσει το πιο πάνω παιχνίδι σε έναν αγοραστή που θα πληρώσει επιπλέον 19% Φ.Π.Α. πάνω στην τιμή πώλησης.</p> <p><b>Λύση:</b></p> <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 50%;"><u>1<sup>ος</sup> τρόπος</u></td> <td style="text-align: center; width: 50%;"><u>2<sup>ος</sup> τρόπος</u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>\text{Φ.Π.Α: } 400 \cdot \frac{19}{100} = €76</math></td> <td style="text-align: center;"><math>400 \cdot \frac{119}{100} = €476</math></td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="text-align: center;">Τελική Τιμή: <math>400+76= €476</math></td> </tr> </table>	<u>1<sup>ος</sup> τρόπος</u>	<u>2<sup>ος</sup> τρόπος</u>	$\text{Φ.Π.Α: } 400 \cdot \frac{19}{100} = €76$	$400 \cdot \frac{119}{100} = €476$	Τελική Τιμή: $400+76= €476$		
<u>1<sup>ος</sup> τρόπος</u>	<u>2<sup>ος</sup> τρόπος</u>							
$\text{Φ.Π.Α: } 400 \cdot \frac{19}{100} = €76$	$400 \cdot \frac{119}{100} = €476$							
Τελική Τιμή: $400+76= €476$								
6.	<p>Κώνος έχει ακτίνα βάσης 5 cm και ύψος 12 cm.          Να βρείτε:</p> <p>(α) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.          (β) Τον όγκο του κώνου.</p> <p><b>Λύση:</b> (α) <math>\lambda^2 = u^2 + R^2 \Rightarrow \lambda^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow \lambda = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}</math></p> <p style="margin-left: 40px;"><math>E_{\text{ολ}} = E_{\kappa} + E_{\beta} = \pi R \lambda + \pi R^2 = \pi \cdot 5 \cdot 13 + \pi \cdot 5^2 = 65\pi + 25\pi = 90\pi \text{ cm}^2</math></p> <p>(β) <math>V = \frac{E_{\beta} \cdot u}{3} = \frac{25\pi \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3</math></p>							
7.	<p>Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κύβου είναι <math>96 \text{ cm}^2</math>. Να υπολογίσετε τον όγκο του.</p> <p><b>Λύση:</b></p> <p><math>E_{\text{ολ}} = E_{\pi} + 2E_{\beta} = 4\alpha^2 + 2\alpha^2 = 6\alpha^2</math></p> <p><math>6\alpha^2 = 96 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{96}{6} = 16 \Rightarrow \alpha = \sqrt{16} = 4 \text{ cm}</math></p> <p><math>V = E_{\beta} \cdot u = \alpha^2 \cdot \alpha = \alpha^3 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3</math></p>							

8.	<p>Η αξία ενός διαμερίσματος μειώθηκε κατά 15% λόγω της οικονομικής κρίσης. Αν η σημερινή μειωμένη αξία του διαμερίσματος είναι €136 000, να βρείτε ποια ήταν η αξία του διαμερίσματος πριν την οικονομική κρίση.</p> <p><b>Λύση:</b></p> $136000 \cdot \frac{x}{85} = \frac{100 \cdot 136000}{100} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 136000}{85} = 160000$ <p>Η αξία του διαμερίσματος ήταν €160000.</p>	
9.	<p>Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 8 cm και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 80 cm<sup>2</sup>. Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.</p> <p><b>Λύση:</b></p> $E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2} = 80 \text{ cm}^2 \Rightarrow \frac{32 \cdot h}{2} = 80 \Rightarrow h = \frac{80 \cdot 2}{32} = 5 \text{ cm}$ $5^2 = u^2 + 4^2$ $\Rightarrow u^2 = 25 - 16 = 9$ $\Rightarrow u = \sqrt{9} = 3 \text{ cm}$ $V = \frac{E_{\beta} \cdot u}{3} = \frac{8^2 \cdot 3}{3} = 64 \text{ cm}^3$  	
10.	<p>Σε μια εταιρεία εργάζονται 8 άτομα ως τεχνικό προσωπικό και 4 άτομα ως διευθυντικό προσωπικό. Η μέση τιμή των μηνιαίων μισθών του τεχνικού προσωπικού είναι €650 ενώ του διευθυντικού προσωπικού είναι €950.</p> <p>(α) Να βρείτε τη μέση τιμή των μηνιαίων μισθών όλων των υπαλλήλων της εταιρείας.</p> <p>(β) Στο τέλος του χρόνου θα αφυπηρετήσει ένας υπάλληλος με μισθό €1025 τον μήνα. Να βρείτε τη μέση τιμή των μηνιαίων μισθών των υπόλοιπων υπαλλήλων της εταιρείας.</p> <p><b>Λύση:</b></p> $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{8} = 650 \Rightarrow \sum x_i = 8 \cdot 650 = 5200$ $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{4} = 950 \Rightarrow \sum y_i = 4 \cdot 950 = 3800$ $\Rightarrow 5200 + 3800 = 9000$ $\bar{z} = \frac{9000}{12} = 750$ <p>Η μέση τιμή των μηνιαίων μισθών όλων των υπαλλήλων της εταιρείας είναι €750.</p>	

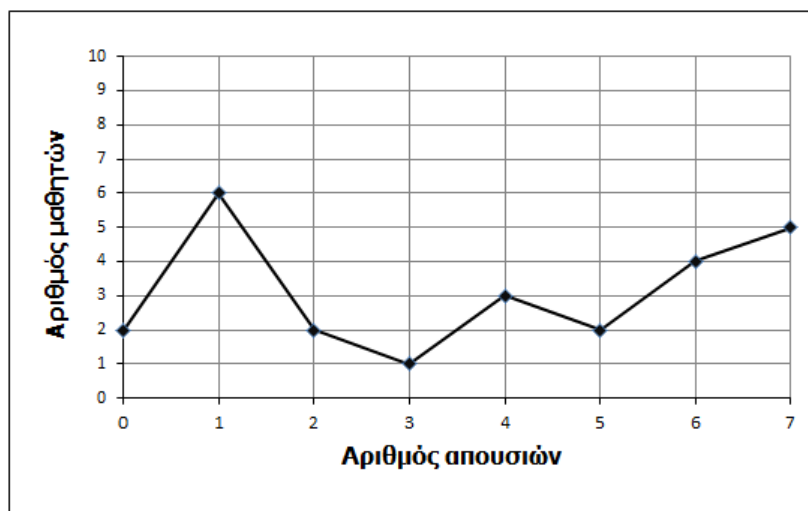
(β)

$$9000 - 1025 = 7975 \Rightarrow \bar{x}' = \frac{7975}{11} = 725$$

Η μέση τιμή των μηνιαίων μισθών των υπόλοιπων υπαλλήλων της εταιρείας είναι €725.

## ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Το πιο κάτω πολύγωνο συχνοτήτων παρουσιάζει τον αριθμό των απουσιών των 25 μαθητών ενός τμήματος, κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας του Μάρτη.



Να βρείτε:

- (α) Πόσοι από τους μαθητές έχουν κάνει 6 απουσίες.
- (β) Πόσοι μαθητές έχουν κάνει λιγότερες από 3 απουσίες.
- (γ) Την επικρατούσα τιμή ( $x_\epsilon$ ) του αριθμού των απουσιών.
- (δ) Τη διάμεσο ( $x_\delta$ ) του αριθμού των απουσιών.
- (ε) Το ποσοστό (%) των μαθητών που έχουν κάνει 5 απουσίες.

**Λύση:**

(α) 4 μαθητές

(β)  $2 + 6 + 2 = 10$  μαθητές

(γ)  $x_\epsilon = 1$

(δ) θέση =  $\frac{v+1}{2} = \frac{25+1}{2} = \frac{26}{2} = 13^{\text{η}} \Rightarrow x_\delta = 4$

(ε) Ποσοστό μαθητών =  $\frac{2}{25} \cdot 100\% = 8\%$

2. Στον πιο κάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων φαίνεται ο αριθμός των τερμάτων που πέτυχαν σε μια αγωνιστική οι 12 ομάδες που συμμετείχαν στο φετινό πρωτάθλημα ποδοσφαίρου.

Αριθμός τερμάτων ( $x_i$ )	0	1	2	3	4
Αριθμός ομάδων ( $f_i$ )	2	1	5	3	1

Να βρείτε:

(α) Τη μέση τιμή ( $\bar{x}$ ) των τερμάτων που πέτυχαν οι ομάδες.

(β) Την τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ) των τερμάτων που πέτυχαν οι ομάδες.

**Λύση:**

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
0	2	0	4	8
1	1	1	1	1
2	5	10	0	0
3	3	9	1	3
4	1	4	4	4
	<b>12</b>	<b>24</b>		<b>16</b>

$$(α) \bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{24}{12} = 2$$

$$(β) \sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{16}{12}} \approx 1,15$$

3. Εισαγωγέας αγόρασε από εργοστάσιο του εξωτερικού 124 τηλεοράσεις και πλήρωσε €43 400. Πλήρωσε επιπλέον €1600 για έξοδα μεταφοράς. Κατά τη μεταφορά έσπασαν 4 τηλεοράσεις. Τις υπόλοιπες θα τις πωλήσει προς €450 την κάθε μία. Να υπολογίσετε το ποσοστό (%) κέρδους που θα έχει ο εισαγωγέας.

**Λύση:**

$$\text{Αξία} + \text{Μεταφορικά} = 43400 + 1600 = €45000$$

$$\text{Αριθμός τηλεοράσεων προς πώληση} = 124 - 4 = 120$$

$$\text{Είσπραξη} = 450 \cdot 120 = €54000$$

$$\text{Κέρδος} = 54000 - 45000 = €9000$$

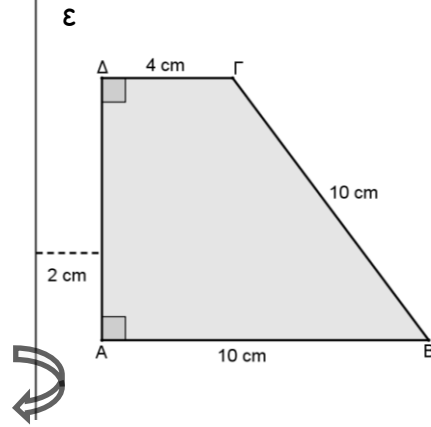
$$\text{Ποσοστό κέρδους} = \frac{9000}{45000} \cdot 100\% = 20\%$$

4. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ  
 ( $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ) με  $AB = B\Gamma = 10$  cm και  
 $\Gamma\Delta = 4$  cm.

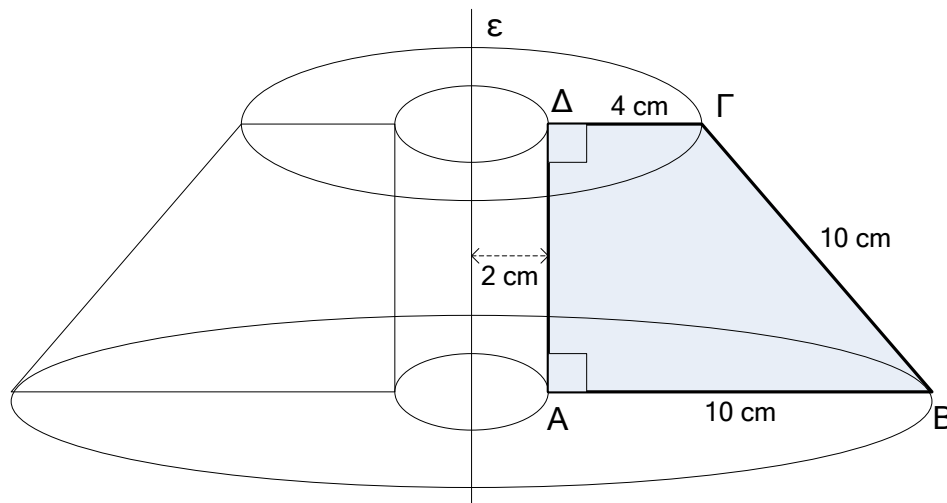
Το τραπέζιο στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από ευθεία (ε) που είναι παράλληλη προς την πλευρά ΑΔ και απέχει από αυτήν απόσταση 2 cm.

Να βρείτε:

- (α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.  
 (β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.



**Λύση:**



**Κόλουρος Κώνος**

$$R = 10 + 2 = 12 \text{ cm}$$

$$\rho = 4 + 2 = 6 \text{ cm}$$

Π.Θ.  $\lambda^2 = (R - \rho)^2 + u^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + u^2 \Rightarrow u = 8 \text{ cm}$

$$E_{\beta} = \pi \rho^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi \text{ cm}^2$$

$$E_{\alpha} = \pi R^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$$

$$E_{\kappa} = \pi(R + \rho) \cdot \lambda = \pi(12 + 6) \cdot 10 = 180\pi \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{κόλουρου κώνου}} = \frac{\pi u}{3}(R^2 + Rr + r^2) = \frac{\pi \cdot 8}{3}(12^2 + 12 \cdot 6 + 6^2) = \frac{\pi \cdot 8}{3}(144 + 72 + 36)$$

$$= \frac{\pi \cdot 8}{3} \cdot 252 = 672\pi \text{ cm}^3$$

### Κύλινδρος

$$r = 2 \text{ cm}, \quad u = 8 \text{ cm}$$

$$V_{\text{κυλίνδρου}} = \pi r^2 \cdot u = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi \text{ cm}^3$$

$$E_{\beta\text{κυλ}} = \pi r^2 = 2^2 \pi = 4\pi \text{ cm}^2$$

$$E_{\kappa} = 2\pi r u = 2\pi \cdot 2 \cdot 8 = 32\pi \text{ cm}^2$$

$$(\alpha) E_{\text{ολ}} = E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} + E_{\text{δακτυλίου μεγάλου}} + E_{\text{δακτυλίου μικρού}} + E_{\text{κυρτής κόλουρου κώνου}}$$

$$= 32\pi + (144\pi - 4\pi) + (36\pi - 4\pi) + 180\pi = 384\pi \text{ cm}^2$$

$$(\beta) V = V_{\text{κόλουρου κώνου}} - V_{\text{κυλίνδρου}} = 672\pi - 32\pi = 640\pi \text{ cm}^3$$

5. Η κυρία Μάρθα, ιδιοκτήτρια εστιατορίου, θέλει να κατασκευάσει στην είσοδο του εστιατορίου της ένα ενυδρείο από γυαλί. Το ενυδρείο θα έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκος 2.5 m, πλάτος 0.6 m, ύψος 1 m και το οποίο θα είναι ανοικτό στο πάνω μέρος. Το γυαλί κοστίζει €40 το τετραγωνικό μέτρο. Τα υπόλοιπα υλικά που απαιτούνται για την κατασκευή του ενυδρείου κοστίζουν €450.

(α) Να υπολογίσετε το συνολικό κόστος κατασκευής του ενυδρείου.

(β) Η κυρία Μάρθα θα γεμίσει το ενυδρείο με νερό που θα φτάνει το 90% του ύψους του. Να υπολογίσετε πόσα κυβικά μέτρα νερό θα χρειαστεί.

(Για την επίλυση της άσκησης, το πάχος του γυαλιού να θεωρηθεί αμελητέο)

### **Λύση:**

$$(\alpha) E_{\text{ολ}} = \alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma = 2,5 \cdot 0,6 + 2 \cdot 2,5 \cdot 1 + 2 \cdot 0,6 \cdot 1 = 7,7 \text{ m}^2$$

$$\text{Συνολικό κόστος κατασκευής: } 7,7 \cdot 40 + 450 = 308 + 450 = \text{€}758$$

$$(\beta) \text{ Ύψος νερού: } \frac{90}{100} \cdot 1 = 0,9 \text{ m}$$

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 2,5 \cdot 0,6 \cdot 0,9 = 1,35 \text{ m}^3$$

Θα χρειαστεί 1,35 κυβικά μέτρα νερού.