ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

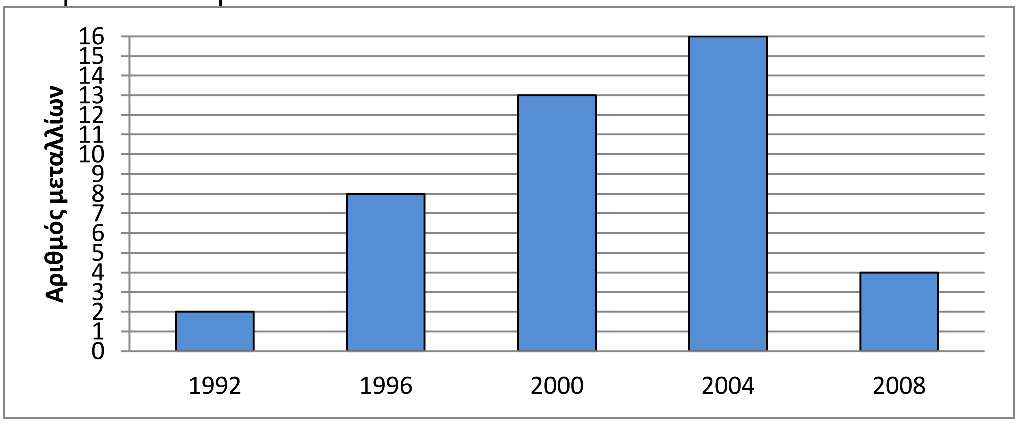
ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή, 1 Ιουνίου 2012
8:30 – 11:30

Προτεινόμενες Λύσεις

ΜΕΡΟΣ Α΄

1. Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα συχνοτήτων παρουσιάζεται ο αριθμός των μεταλλίων που πήρε η Ελλάδα στις πέντε τελευταίες διοργανώσεις των Ολυμπιακών αγώνων.



α) Να υπολογίσετε το σύνολο των μεταλλίων που πήρε η Ελλάδα από το 1992 μέχρι σήμερα.

β) Να βρείτε ποια χρονιά πήρε τα περισσότερα μετάλλια.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) Σύνολο μεταλλίων: $2 + 8 + 13 + 16 + 4 = 43$

β) 2004

2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις $\alpha = 3\ cm$, $\beta = 5\ cm$ και $\gamma = 8\ cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$V = \alpha.\beta.\gamma$

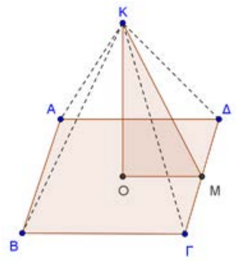
$V = 3 \cdot 5 \cdot 8 = 120 cm^3$

3.	Κεφάλαιο €4000 τοκίζεται με απλό τόκο προς 4,75% για 3 χρόνια. Να υπολογίσετε τον τόκο που θα αποδώσει. **<u>ΛΥΣΗ</u>** $T = \frac{KEX}{100} = \frac{4000 \cdot 4{,}75 \cdot 3}{100}$ $T = €570$	
4.	Οι βαθμοί που πήρε ένας μαθητής στο Β΄ τετράμηνο είναι: 17 16 18 16 20 20 19 17 20 17 20 16 19 17 Να υπολογίσετε: α) Το μέσο όρο των βαθμών του μαθητή. β) Τη διάμεσο των βαθμών του μαθητή. **<u>ΛΥΣΗ</u>** **α)** 16 16 16 17 17 17 17 18 19 19 20 20 20 20 $\overline{X} = \frac{3 \cdot 16 + 4 \cdot 17 + 18 + 2 \cdot 19 + 4 \cdot 20}{14} = \frac{252}{14} = 18$ **β)** $x_{\delta} = \frac{17+18}{2} = 17{,}5$	
5.	Δίνεται η λέξη **Ο Μ Ο Ι Ο Μ Ο Ρ Φ Ο** Να υπολογίσετε: α) Το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. β) Το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης που αρχίζουν και τελειώνουν με το γράμμα **Μ**. **<u>ΛΥΣΗ</u>** **α)** $\boxed{\text{ΜΜΟΟΟΟΟΙΡΦ}}$ $M_{10}^{\varepsilon} = \frac{10!}{5! \cdot 2!} = 15120$ **β)** $\boxed{\text{ΜΟΟΟΟΟΙΡΦΜ}}$ $M_{8}^{\varepsilon} = \frac{8!}{5!} = 336$	

6. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό βάσης $144\ cm^2$ και ύψος $8\ cm$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

<u>ΛΥΣΗ</u>



$E_\beta = 144\ \text{cm}^2$, $\quad \upsilon = 8cm$

$\alpha^2 = 144cm^2 \Rightarrow a = B\Gamma = 12\text{cm}$

$$OM = \frac{B\Gamma}{2} = 6cm$$

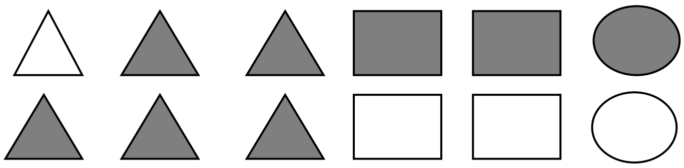
$h^2 = \upsilon^2 + OM^2 \Longrightarrow\ h^2 = 8^2 + 6^2 \Longrightarrow h^2 = 100 \Rightarrow h = 10cm$

$$E_\pi = \frac{\Pi_\beta \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 10}{2} = 240\,\text{cm}^2$$

$E_{o\lambda} = E_\pi + E_\beta \Rightarrow$

$E_{o\lambda} = 240 + 144 = 384\text{cm}^2$

7. Από τα πιο κάτω σχήματα επιλέγουμε ένα στην τύχη. Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{A}$ το ενδεχόμενο να επιλέξουμε τρίγωνο και με $\boldsymbol{B}$ το ενδεχόμενο να επιλέξουμε σκιασμένο σχήμα.



Να υπολογίσετε τις πιο κάτω πιθανότητες :

α) Να επιλέξουμε τρίγωνο.

β) $P(B)$

γ) $P(A \cap B)$

δ) $P(A \cup B)$

ε) $P(B - A)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $\mathrm{P(A)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

β) $\mathrm{P(B)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

γ) $\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{5}{12}$

δ) $\mathrm{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

$\mathrm{P(A \cup B)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

ε) $\mathrm{P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)}$

$\mathrm{P(B - A)} = \frac{2}{3} - \frac{5}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

8.	Η κατανάλωση ενός γραμμαρίου καθαρού αλκοόλ δίνει στον ανθρώπινο οργανισμό 7 θερμίδες. Πόσες θερμίδες παίρνει ο ανθρώπινος οργανισμός με την κατανάλωση ενός κουτιού μπύρας των 330 γραμμαρίων που έχει περιεκτικότητα σε αλκοόλ 5%. **<u>ΛΥΣΗ</u>** $330 \cdot \frac{5}{100} = 16{,}5\ \mathrm{gr}$ καθαρό αλκοόλ $\mathrm{x} = 16{,}5 \cdot 7 = 115{,}5$ θερμίδες	
9.	Δίνονται τα ψηφία $\mathbf{1, 2, 3, 5, 6, 8.}$ α) Να υπολογίσετε πόσοι διαφορετικοί αριθμοί μικρότεροι από το 500 μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία αν δεν επιτρέπεται επανάληψη ψηφίου. β) Αν επιλεγεί στην τύχη ένας από τους αριθμούς του ερωτήματος (α), να υπολογίσετε την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να είναι τριψήφιος. **<u>ΛΥΣΗ</u>** **α)** Μικρότεροι του 500 είναι όλοι οι μονοψήφιοι, όλοι οι διψήφιοι και οι τριψήφιοι που έχουν το ψηφίο των εκατοντάδων μικρότερο του 5 Μονοψήφιοι αριθμοί : 6 Διψήφιοι αριθμοί [Δ | Μ / 6 | 5] : $6 \cdot 5 = 30$ Τριψήφιοι αριθμοί [Ε | Δ | Μ / 3 | 5 | 4] : $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ Σύνολο αριθμών: $6 + 30 + 60 = 96$ **β)** Ρ(β)= $\frac{60}{96}$	

10.	Ένας αυτοκινητιστής χρειάστηκε 45 λεπτά για να μεταβεί από την πόλη Α στην πόλη Β οδηγώντας με μέση ταχύτητα $100\ km/h$. Πόσο χρόνο, σε λεπτά, θα χρειαστεί για να επιστρέψει στην πόλη Α από τον ίδιο δρόμο, αν η μέση ταχύτητα του αυτοκινήτου του θα είναι $90\ km/h$; **<u>ΛΥΣΗ</u>** Από την πόλη Α στην Β $\upsilon_1 = 100\ \ Km/h$ $t_1 = 45\ \lambda\varepsilon\pi\tau ά = \frac{45}{60} h = 0{,}75h$ $s = \upsilon_1 \cdot t_1$ $s = 100 \cdot 0{,}75 = 75Km$ Από την πόλη Β στην Α $\upsilon_2 = 90Km/h$ $s = \upsilon_2 \cdot t_2$ $75 = 90 \cdot t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{75}{90} = \frac{5}{6} h = 50$ λεπτά	

ΜΕΡΟΣ Β΄

1.

Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι θερμοκρασίες σε βαθμούς κελσίου που καταγράφηκαν στις $12:00$ το μεσημέρι, για κάθε μέρα του Απριλίου του 2012, σε ένα χωριό της Κύπρου.

Θερμοκρασία (x_i)	12	13	15	16	17	19
Αρ. ημερών (f_i)	1	7	8	1	3	10

Να υπολογίσετε:

α) Την επικρατούσα τιμή (x_ε) των παρατηρήσεων.

β) Την διάμεσο τιμή (x_δ) των παρατηρήσεων.

γ) Την μέση τιμή $(\bar{x})$ των παρατηρήσεων.

δ) Την τυπική απόκλιση (σ) των παρατηρήσεων.

ΛΥΣΗ

x_i	f_i	$f_i x_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
12	1	12	16	16
13	7	91	9	63
15	8	120	1	8
16	1	16	0	0
17	3	51	1	3
19	10	190	9	90
	$\sum f_i = 30$	$\sum f_i x_i = 480$		$\sum f_i(x_i - \bar{x})^2 = 180$

α) επικρατούσα τιμή $x_\varepsilon = 19$

β) διάμεσος τιμή θα βρίσκεται στη 15^η και 16^η θέση, $x_\delta = \frac{15+15}{2} = 15$

γ) μέση τιμή $\bar{x} = \frac{480}{30} = 16$

δ) τυπική απόκλιση $\sigma = \sqrt{\frac{180}{30}} = \sqrt{6} = 2{,}45$

2. Ο όμιλος ποδηλατιστών της πόλης έχει 6 διθέσια και 10 μονοθέσια ποδήλατα. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 4 ποδήλατα αν:

α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς το είδος του ποδηλάτου,

β) στα ποδήλατα αυτά θα υπάρχουν θέσεις για 7 τουλάχιστον άτομα.

<u>ΛΥΣΗ</u>

α) $\binom{16}{4} = 1820$

β) 3 διθέσια και 1 μονοθέσιο $\binom{6}{3} \cdot \binom{10}{1} = 20 \cdot 10 = 200$

4 διθέσια $\binom{6}{4} = 15$

Συνολικά $200 + 15 = 215$ τρόποι

3. Ένας επιχειρηματίας αγόρασε ένα φορτίο ξυλείας με κόστος αγοράς €25000. Πλήρωσε επιπρόσθετα έξοδα για την μεταφορά του φορτίου 12% πάνω στο κόστος αγοράς. Στην συνέχεια πώλησε τα $\frac{5}{7}$ του φορτίου με κέρδος 20% και το υπόλοιπο μέρος του φορτίου με ζημιά 30%. Να εξετάσετε κατά πόσο ο επιχειρηματίας κέρδισε ή ζήμιωσε και να υπολογίσετε το συνολικό ποσό του κέρδους ή της ζημιάς του.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$\frac{12 \cdot 25000}{100} = 3000$

Συνολικό κό
στος: $25000 + 3000 = €28000$

Α’ Τρόπος	Β’ Τρόπος
$\frac{5}{7} \cdot 28000 \cdot \frac{120}{100} = 24000$	$\frac{5}{7} \cdot 28000 \cdot \frac{20}{100} = 4000$ (Κέρδος)
$\frac{2}{7} \cdot 28000 \cdot \frac{70}{100} = 5600$	$\frac{2}{7} \cdot 28000 \cdot \frac{30}{100} = 2400$ (Ζημιά)
Συνολική είσπραξη: $24000 + 5600 = €29600$	
Κέρδος: $29600 - 28000 = €1600$	Τελικό Κέρδος: $4000 - 24000 = €1600$

4. Σε ένα σακούλι υπάρχουν 3 άσπροι, 4 κίτρινοι και 2 μπλε βώλοι. Παίρνουμε στην τύχη 3 βώλους. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

Α: «και οι τρεις βώλοι είναι άσπροι»
Β: «μόνο ένας βώλος είναι άσπρος»
Γ: «τουλάχιστο ένας βώλος είναι άσπρος».

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$\mathrm{N}(\Omega) = \binom{9}{3} = 84$$

α) $$P(\mathrm{A}) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{1}{84}$$

β) $1A2K$ ή $1A2M$ ή $1A1K1M$:

$$P(\mathrm{B}) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}+\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}+\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{18+3+24}{84} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

<u>ή</u>

$$P(\mathrm{B}) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

γ) $$P(\Gamma) = 1 - P(\kappa\alpha\nu\acute{\varepsilon}\nu\alpha\varsigma\ {}'A\sigma\pi\rho o\varsigma)$$

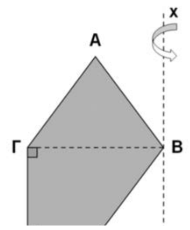
$$= 1 - \frac{\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}+\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{9}{3}}$$

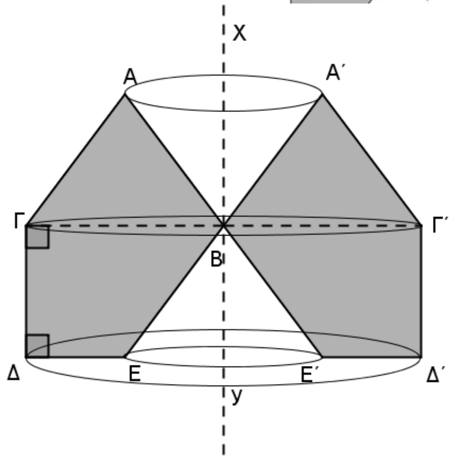
$$= 1 - \frac{4+12+4}{84} = 1 - \frac{20}{84} = \frac{64}{84} = \frac{16}{21}$$

<u>ή</u>

$$P(\Gamma) = 1 - \frac{\binom{6}{3}}{\binom{9}{3}} = 1 - \frac{20}{84} = \frac{64}{84} = \frac{16}{21}$$

5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΒΓ = 6\ cm$ και $ΑΒ = ΑΓ = 5\ cm$. Το $ΒΕΔΓ$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις $ΒΓ$ και $ΔΕ$, ύψος $ΓΔ = 4\ cm$ και πλευρά $ΒΕ = 5\ cm$. Το σκιασμένο πολύγωνο $ΑΒΕΔΓ$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xBy που είναι κάθετος στη $ΒΓ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.





ΛΥΣΗ

Κόλουρος Κώνος ΑΑ΄Γ΄Γ

$\lambda = 5\ cm$

$\rho = \frac{ΒΓ}{2} = 3\ cm$

$R = 6\ cm$

$\upsilon^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow \upsilon = \sqrt{16} \Rightarrow \upsilon = 4\ cm$

$E_{\kappa(\kappa o\lambda.\kappa)} = \pi(R+\rho)\lambda = \pi(6+3)5 = 45\pi$

$$V_{(\kappa o\lambda.\kappa)} = \frac{\pi(R^2 + R\rho + \rho^2)\upsilon}{3} = \frac{\pi(6^2 + 6\cdot 3 + 3^2)4}{3} = 84\pi$$

Κώνος ΑΒΑ΄(K_1) και Κώνος ΕΒΕ΄(K_2)

$\lambda = 5\ cm$

$R = 3\ cm$

$\upsilon = 4\ cm$

$E_{\kappa(\kappa\omega\nu o\upsilon)} = \pi R\lambda = \pi\cdot 3\cdot 5 = 15\pi\ cm^2$

$V_{(\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon)} = \frac{\pi R^2\upsilon}{3} = \frac{\pi\cdot 3^2\cdot 4}{3} = 12\pi\ cm^3$

Κύλινδρος ΓΓ΄Δ΄Δ

$R = 6\ cm$

$\upsilon = 4\ cm$

$E_{\kappa(\kappa\upsilon\lambda)} = 2\pi R\upsilon = 2\pi\cdot 6\cdot 4 = 48\pi\ cm^2$

$V_{\kappa\upsilon\lambda} = \pi R^2\upsilon = \pi\cdot 6^2\cdot 4 = 144\pi\ cm^3$

Δακτύλιος ΔΕ

$\rho = \frac{ΒΓ}{2} = 3\ cm$

$R = 6\ cm$

$E_{\delta\alpha\kappa\tau} = \pi R^2 - \pi\rho^2 = \pi\cdot 6^2 - \pi\cdot 3^2 = 36\pi - 9\pi = 27\pi$

$\boldsymbol{E_{o\lambda} = E_{\kappa(\kappa o\lambda.\kappa)} + E_{\kappa(\kappa\omega\nu o\upsilon\ AB)} + E_{\kappa(\kappa\omega\nu o\upsilon\ EB)} + E_{\kappa(\kappa\upsilon\lambda)} + E_{\delta\alpha\kappa\tau}}$

$E_{o\lambda} = 45\pi + 15\pi + 15\pi + 48\pi + 27\pi$

$E_{o\lambda} = 150\pi\ cm^2$

$\boldsymbol{V = V_{(\kappa o\lambda.\kappa)} - V_{(\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon\ AB)} + V_{\kappa\upsilon\lambda} - V_{(\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon\ EB)}}$

$V = 84\pi - 12\pi + 144\pi - 12\pi$

$V = 204\pi\ cm^3$