

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τετάρτη, 23 Μαΐου 2012
10:30 – 13:30

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	<p>Οι βαθμοί ενός μαθητή στα μαθήματα του πρώτου τετραμήνου είναι: 19, 20, 17, 12, 15, 14, 18, 19, 20, 16. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών του μαθητή.</p> <p>ΛΥΣΗ</p> $\bar{X} = \frac{19 + 20 + 17 + 12 + 15 + 14 + 18 + 19 + 20 + 16}{10}$ $\bar{X} = \frac{170}{10}$ $\bar{X} = 17$	
2.	<p>Να βρείτε τον όγκο ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με μήκος 5 m, πλάτος 3 m και ύψος 2 m.</p> <p>ΛΥΣΗ</p> $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$ $V = 5 \cdot 3 \cdot 2$ $V = 30 \text{ m}^3$	
3.	<p>Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΠΡΟΕΔΡΙΑ.</p> <p>ΛΥΣΗ</p> $M_8^e = \frac{8!}{2!} = \frac{40320}{2} = 20160$	

4.	<p>Σε μια καλλιέργεια χρησιμοποιούνται κάθε χρόνο 120 λίτρα ενός φυτοφαρμάκου. Το Υπουργείο Γεωργίας υποχρεώνει τους παραγωγούς να μειώσουν τη χρήση αυτού του φυτοφαρμάκου κατά 15%. Πόσα λίτρα φυτοφαρμάκου χρειάζονται κάθε χρόνο για την ίδια καλλιέργεια μετά την οδηγία αυτή;</p> <p><u>ΛΥΣΗ</u></p> $\frac{15}{100} \cdot 120 = 18 \text{ λίτρα}$ $120 - 18 = 102 \text{ λίτρα}$							
5.	<p>Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y = x^3 + 2x + 1$</p> <p><u>ΛΥΣΗ</u></p> $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2$							
6.	<p>Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(1, 2)$ και ακτίνα $R = 3$</p> <p><u>ΛΥΣΗ</u></p> $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$							
7.	<p>Οι μαθητές της Α΄ τάξης είναι 150 και αποτελούν το 30% του συνόλου των μαθητών του σχολείου. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το σχολείο.</p> <p><u>ΛΥΣΗ</u></p> <table border="1" data-bbox="245 1632 949 1787"> <thead> <tr> <th>A΄ τάξη</th> <th>Σύνολο μαθητών</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>150</td> <td>x</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>100</td> </tr> </tbody> </table> $x = \frac{100 \cdot 150}{30}$ $x = 500$	A΄ τάξη	Σύνολο μαθητών	150	x	30	100	
A΄ τάξη	Σύνολο μαθητών							
150	x							
30	100							

<p>8.</p>	<p>Άρωμα πωλείται σε δύο διαφορετικές συσκευασίες στην ίδια τιμή. Η μια συσκευασία είναι σε μπουκάλι σχήματος κύβου με ακμή 4 cm και η άλλη σε μπουκάλι σχήματος κυλίνδρου με ακτίνα βάσης 2 cm και ύψος 5 cm. Αν τα μπουκάλια είναι πλήρως γεμάτα και το πάχος του υλικού της συσκευασίας θεωρηθεί αμελητέο, ποιά συσκευασία μας συμφέρει να αγοράσουμε;</p> <p>ΛΥΣΗ $V = a^3$ $V = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$ $V = \pi R^2 u$ $V = \pi 2^2 \cdot 5 = 62,8 \text{ cm}^3$</p> <p>Μας συμφέρει να αγοράσουμε την συσκευασία σχήματος κύβου.</p>	
<p>9.</p>	<p>Να βρείτε τη γενική λύση της τριγωνομετρικής εξίσωσης $\sin 4x = \sin 40^\circ$</p> <p>ΛΥΣΗ $\sin 4x = \sin 40^\circ$ $4x = 360k \pm 40^\circ$ $x = 90k \pm 10^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$</p>	
<p>10.</p>	<p>Να λύσετε το σύστημα: $2x + y = 4$ $x \cdot y = -6$</p> <p>ΛΥΣΗ</p> $\left. \begin{array}{l} y = 4 - 2x \\ x \cdot y = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow$ $x \cdot (4 - 2x) = -6$ $4x - 2x^2 = -6$ $x^2 - 2x - 3 = 0$ $(x - 3)(x + 1) = 0$ $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ <p>Αν $x = 3 \Rightarrow y = 4 - 6 \Rightarrow y = -2$ $x = 3, y = -2$</p> <p>Αν $x = -1 \Rightarrow y = 4 + 2 \Rightarrow y = 6$ $x = -1, y = 6$</p> <p>Απάντηση: $x = 3, y = -2$ ή $x = -1, y = 6$</p>	

ΜΕΡΟΣ Β΄

1. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει το χρόνο, σε δευτερόλεπτα, που χρειάστηκαν για να τρέξουν μια δεδομένη απόσταση 20 αθλητές.

Χρόνος σε δευτερόλεπτα (x_i)	50	55	60	65
Αριθμός αθλητών (f_i)	3	8	7	2

Να βρείτε:

- (α) Την επικρατούσα τιμή (x_e) των παρατηρήσεων.
(β) Τη μέση τιμή (\bar{x}) των παρατηρήσεων.
(γ) Την τυπική απόκλιση (σ) των παρατηρήσεων.

ΛΥΣΗ

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
50	3	150	-7	49	147
55	8	440	-2	4	32
60	7	420	3	9	63
65	2	130	8	64	128
	20	1140			370

α) Η επικρατούσα τιμή είναι: $x_e = 55 \text{ sec}$

β) Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i \cdot x_i}{\sum f_i} = \frac{1140}{20} = 57 \text{ sec}$$

γ) Η τυπική απόκλιση είναι:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{370}{20}} = \sqrt{18,5} \approx 4,3$$

2.

(α) Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int(3x^2 + 6x - 1)dx$

(β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $y = \eta\mu 3x + \sqrt{x^3 + 1}$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}(\alpha) \int(3x^2 + 6x - 1)dx &= \frac{3x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - x + c \\ &= x^3 + 3x^2 - x + c\end{aligned}$$

$$(\beta) \frac{dy}{dx} = 3\sigma\upsilon\nu 3x + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}}$$

3.

Σε ένα συνέδριο συμμετέχουν 4 μαθητές της Α΄ τάξης,
5 μαθητές της Β΄ τάξης και 6 μαθητές της Γ΄ τάξης.

(α) Να βρείτε με πόσους τρόπους:

- i. μπορεί να σχηματιστεί μια τετραμελής επιτροπή,
- ii. μπορεί να σχηματιστεί μια τετραμελής επιτροπή αν η κάθε τάξη πρέπει να αντιπροσωπεύεται.

(β) Αν επιλεγεί στη τύχη ένας μαθητής που συμμετέχει στο συνέδριο, να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να ανήκει στην Α΄ τάξη.

ΛΥΣΗ

(α)

$$i. \binom{15}{4} = 1365$$

$$ii. \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{6}{2} = 720$$

$$(\beta) P(A) = \frac{4}{15}$$

4. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{1}{3}$

$$P(B) = \frac{1}{6} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες:

(α) $P(B')$

(β) $P(A \cup B)$

(γ) $P(A/B)$

(δ) $P(A \cup B')$

Λύση

(α) $P(B') = 1 - P(B)$

$$P(B') = 1 - \frac{1}{6}$$

$$P(B') = \frac{5}{6}$$

(β) $P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{12}$$

(γ) $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$

(δ) $P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$

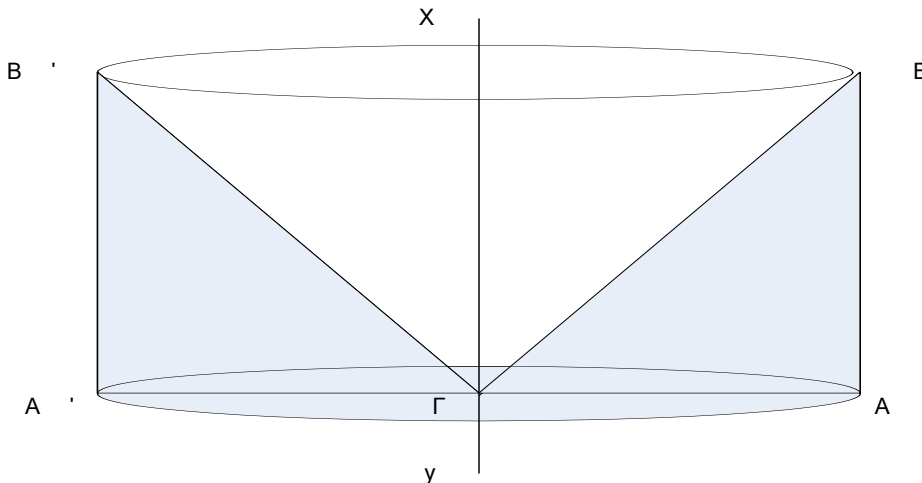
$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A) + P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B') = \frac{5}{6} + \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

5. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$), $AB = 6\text{ cm}$ και $A\Gamma = 8\text{ cm}$. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ κάνει πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $\chi\psi$ που είναι παράλληλος προς την AB και περνά από την κορυφή Γ . Να βρείτε:
(α) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.

(β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

ΛΥΣΗ



Στοιχεία Κυλίνδρου

$$R=8\text{ cm}$$

$$u=6\text{ cm}$$

Στοιχεία Κώνου

$$R=8\text{ cm}$$

$$u = 6\text{ cm}$$

$$\lambda^2 = u^2 + R^2$$

$$\lambda^2 = 6^2 + 8^2$$

$$\lambda^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\lambda = 10\text{ cm}$$

$$(α) V_{ολ} = V_{κυλίνδρου} - V_{κώνου}$$

$$= \pi R^2 u - \frac{\pi R^2 u}{3}$$

$$= \pi 8^2 \cdot 6 - \frac{\pi 8^2 \cdot 6}{3}$$

$$= 384\pi - 128\pi = 256\pi\text{ cm}^3$$

$$(β) E_{ολ} = E_{κ.κυλίνδρου} + E_{κ.κώνου} + E_{κύκλου}$$

$$E_{ολ} = 2\pi R u + \pi R \lambda + \pi R^2$$

$$= 2\pi 8 \cdot 6 + \pi 8 \cdot 10 + \pi 8^2$$

$$= 96\pi + 80\pi + 64\pi = 240\pi\text{ cm}^2$$