

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 31 Μαΐου 2010  
7:30 – 10:30

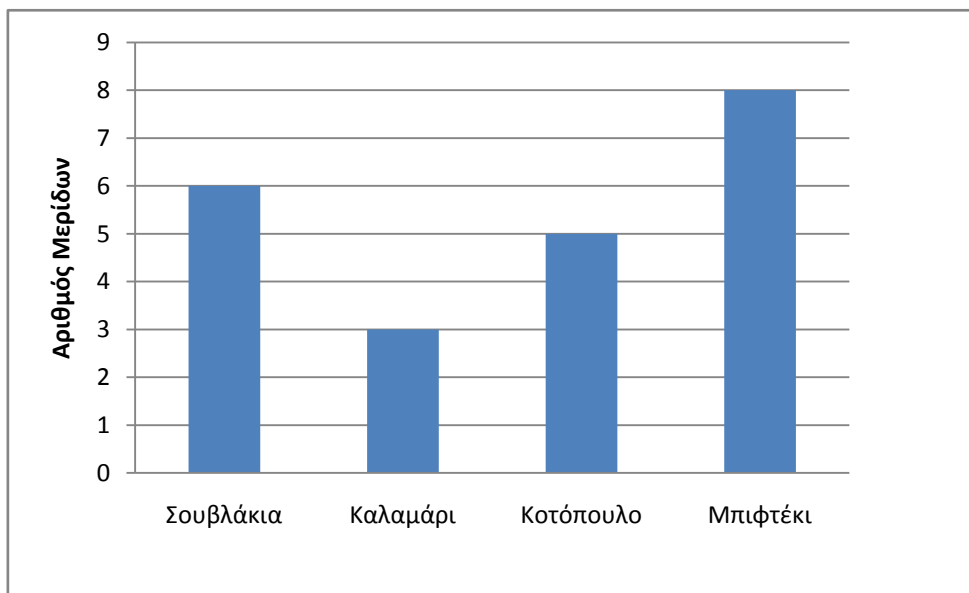
ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄:

1.	<p>Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών: 14, 16, 13, 16, 12, 19</p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> $\bar{x} = \frac{14+16+13+16+12+19}{6}$ $\bar{x} = \frac{90}{6}$ $\bar{x} = 15$	
2.	<p>Να βρείτε την παράγωγο <math>\frac{dy}{dx}</math> της συνάρτησης <math>y = 3x^2 + 8x - 1</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> $\frac{dy}{dx} = 6x + 8$	

3.

Στο πιο κάτω ραβδόγραμμα φαίνεται ο αριθμός των μερίδων φαγητού που παρήγγειλαν οι μαθητές ενός τμήματος σε μια εκδρομή.



Να βρείτε:

- (α) Πόσες μερίδες κοτόπουλο παρήγγειλαν οι μαθητές.  
 (β) Σε ποιο είδος φαγητού οι μαθητές παρήγγειλαν το μικρότερο αριθμό μερίδων.  
 (γ) Πόσες συνολικά ήταν οι μερίδες που παρήγγειλαν οι μαθητές

### ΛΥΣΗ

- (α) 5 μερίδες  
 (β) Το καλαμάρι  
 (γ)  $6+3+5+8=22$  μερίδες

4.

Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΒΙΒΛΙΟ**.  
 Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από **B** και τελειώνουν σε **B**;

### ΛΥΣΗ

$$(α) M_{\varepsilon}^6 = \frac{6!}{2! \cdot 2!}$$

$$M_{\varepsilon}^6 = 180$$

$$(β) M_{\varepsilon}^6 = \frac{4!}{2!} = 12$$

5.	<p>Να υπολογίσετε το όριο <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 3x}{3x^2 - 4}</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 3x}{3x^2 - 4} = \frac{+\infty}{+\infty}</math> (Απροσδιόριστη Μορφή)</p> <p>Εφαρμογή Κανόνα De L' Hospital</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x + 3}{6x} = \frac{+\infty}{+\infty}</math> (Απροσδιόριστη Μορφή)</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{6} = 2</math></p>	
6.	<p>Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο <math>K(2, -1)</math> και ακτίνα <math>R=4</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> <p><math>(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4^2</math></p> <p><math>x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0</math></p>	
7.	<p>Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα <math>\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \, dx</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> <p><math>\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \, dx = [\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) - \eta\mu 0 = 1</math></p>	
8.	<p>Να βρείτε την παράγωγο <math>\frac{dy}{dx}</math> της συνάρτησης <math>y = x \cdot (3x - 2)^4</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> <p><math>\frac{dy}{dx} = (x)' (3x - 2)^4 + x \cdot 4(3x - 2)^3 \cdot (3x - 2)'</math></p> <p><math>\frac{dy}{dx} = (3x - 2)^4 + 12x(3x - 2)^3</math></p> <p><math>\frac{dy}{dx} = (3x - 2)^3 (15x - 2)</math></p>	

9.	<p>Αν <math>y = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 5</math> να δείξετε ότι <math>\frac{d^2y}{dx^2} + y = 5</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> <p><math>y = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 5</math></p> <p><math>\frac{dy}{dx} = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x</math></p> <p><math>\frac{d^2y}{dx^2} = -\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x</math></p> <p><math>\frac{d^2y}{dx^2} + y = -\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + 5 = 5</math></p>	
10.	<p>Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου <math>\Omega</math> με <math>P(A) = \frac{1}{3}</math>, <math>P(B) = \frac{1}{2}</math>, και <math>P(A \cap B) = \frac{1}{4}</math>. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:</p> <p>(α) <math>P(A')</math></p> <p>(β) <math>P(A \cup B)</math></p> <p>(γ) <math>P(A/B)</math></p> <p><b><u>ΛΥΣΗ</u></b></p> <p>α) <math>P(A') = 1 - P(A)</math></p> <p><math>P(A') = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}</math></p> <p>β) <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)</math></p> <p><math>P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}</math></p> <p>γ) <math>P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}</math></p> <p><math>P(A/B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}</math></p>	

**ΜΕΡΟΣ Β΄:**

1.

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς που πήραν οι 24 μαθητές ενός τμήματος στο πρώτο τρίμηνο στα μαθηματικά.

Βαθμός τριμήνου ( $x_i$ )	8	10	11	14	16	19
Αριθμός μαθητών ( $f_i$ )	4	2	4	7	5	2

Να βρείτε:

(α) Την επικρατούσα τιμή ( $x_{\varepsilon}$ ).

(β) Τη μέση τιμή ( $\bar{x}$ ).

(γ) Την τυπική απόκλιση ( $\sigma$ ).

**ΛΥΣΗ**

$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
8	4	32	-5	25	100
10	2	20	-3	9	18
11	4	44	-2	4	16
14	7	98	1	1	7
16	5	80	3	9	45
19	2	38	6	36	72
	24	312			258

α)  $x_{\varepsilon} = 14$

β)  $\bar{x} = \frac{312}{24} = 13$

γ)  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{v}} = \sqrt{\frac{258}{24}} \approx \sqrt{10,75} = 3,28$

2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά

**ΛΥΣΗ**

(α) Πεδίο ορισμού:  $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$  Π.Ο.  $\mathbb{R} - \{-2, +2\}$

(β) Σημεία τομής με τους άξονες:

Αν  $x=0 \Rightarrow y = 0$

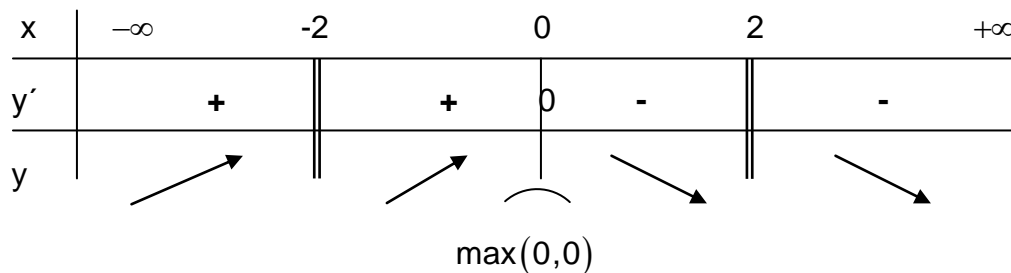
Αν  $y=0 \Rightarrow x = 0$

Άρα τέμνει τους άξονες στο σημείο  $(0, 0)$

(γ) Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$y' = \frac{2x \cdot (x^2 - 4) - (x^2) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \quad x \neq \pm 2$$

$$y' = 0 \Rightarrow -8x = 0 \Rightarrow x = 0$$



δ) Ασύμπτωτες  
Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -2 \text{ Κ.Α.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 2 \text{ Κ.Α.}$$

### Οριζόντια ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} \text{ A.M.}$$

Εφαρμόζω De L'Hospital

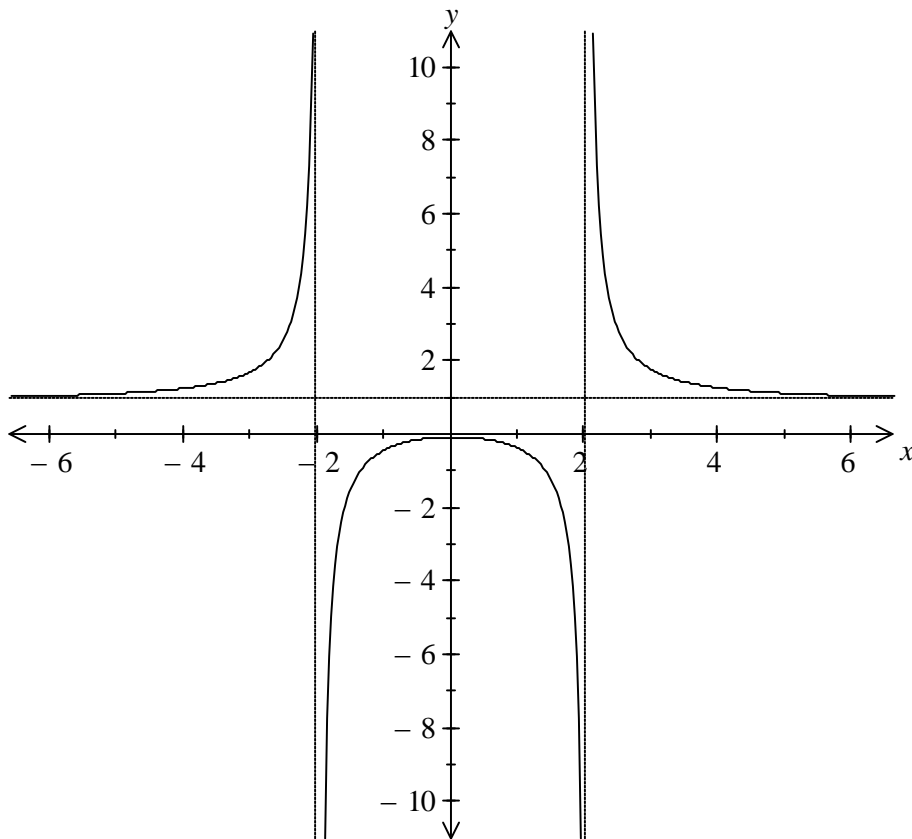
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{\infty}{\infty} \text{ A.M.}$$

Εφαρμόζω De L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$\Rightarrow y=1$  Ο.Α.



3. Σε μια αποθήκη υπάρχουν 30 ηλεκτρικές συσκευές από τις οποίες οι 6 είναι ελαττωματικές. Επιλέγουμε τυχαία 4 συσκευές.

Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: «Τρεις συσκευές είναι ελαττωματικές».

B: «Δύο το πολύ συσκευές είναι ελαττωματικές».

**ΛΥΣΗ**

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{6}{3} \binom{24}{1}}{\binom{30}{4}}$$

$$P(A) = \frac{480}{27405} = \frac{32}{1827}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{6}{0} \binom{24}{4} + \binom{6}{1} \binom{24}{3} + \binom{6}{2} \binom{24}{2}}{\binom{30}{4}}$$

$$P(B) = \frac{10626 + 12144 + 4140}{27405} = \frac{26910}{27405} = \frac{598}{609}$$



4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $y = 2x^3 - 3x^2$

(α) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης στο σημείο της με  $x = 2$

**ΛΥΣΗ**

$$y = 2x^3 - 3x^2$$

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

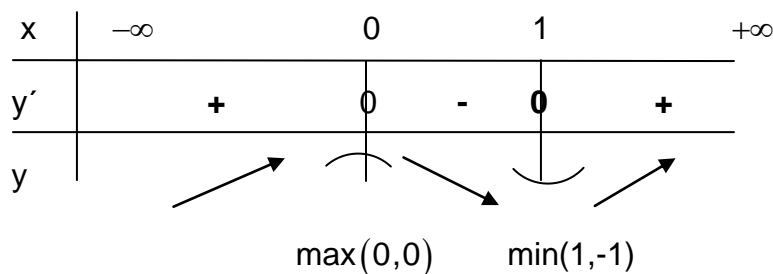
$$y' = 0$$

$$6x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 1$$

$$\text{Για } x=0 \Rightarrow y=0$$

$$\text{Για } x=1 \Rightarrow y=-1$$



$$\text{(β) } x=2 \Rightarrow y=16-12=4 \text{ (2,4)}$$

$$y' = 6x^2 - 6x$$

$$\lambda_{\epsilon\phi} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = 24 - 12 = 12$$

$$y - y_1 = \lambda_{\epsilon\phi} \cdot (x - x_1)$$

$$y - 4 = 12 \cdot (x - 2)$$

$$y = 12x - 20$$

5. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση  $u = \sqrt{1-x}$  ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα  $\int x \cdot \sqrt{1-x} dx$

**ΛΥΣΗ**

$$u = \sqrt{1-x} \Rightarrow u^2 = 1-x$$

$$x = 1-u^2$$

$$dx = -2u du$$

$$\int x \cdot \sqrt{1-x} dx = \int (1-u^2) \cdot u \cdot (-2u) du =$$

$$= \int (2u^4 - 2u^2) du =$$

$$= \frac{2u^5}{5} - \frac{2u^3}{3} + c =$$

$$= \frac{2(\sqrt{1-x})^5}{5} - \frac{2(\sqrt{1-x})^3}{3} + c$$