

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009**

**Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 1 Ιουνίου 2009  
7:30 – 10:30**

<b>ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ</b>
--

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από δύο (2) σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις.  
Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int (3x^2 - 2x) dx$

2) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{3x^2}$

3) Δίνονται οι πίνακες  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$  και  $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Να υπολογίσετε τους πίνακες:

α)  $A + B$

β)  $A \cdot B$

4) Τα A και B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου  $\Omega$ .

Αν  $P(A) = \frac{1}{3}$  και  $P(B) = \frac{3}{4}$ , να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

α)  $P(A \cap B)$

β)  $P(A \cup B)$

γ)  $P(B / A')$

5) Δίνεται κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 96 = 0$ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και το μήκος της ακτίνας του.

β) Να βρείτε τη θέση του σημείου  $A(4,3)$  ως προς τον κύκλο.

γ) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση του σημείου A από τον πιο πάνω κύκλο.

6) Δίνεται η παραβολή  $\psi^2 = 4x$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης ( $\epsilon$ ) της παραβολής στο σημείο της  $A(1, 2)$ .

β) Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή, την εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) και τον άξονα  $xx'$  στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα  $xx'$ .

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή.

7) Δίνεται η πραγματική συνάρτηση  $f$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και για την

οποία ισχύει  $f^3(x) + f(x) = 2e^{2x}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

8) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση  $u = \sqrt{x}$ ,  $x > 0$ , ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα  $\int \ln \sqrt{x} \, dx$

9) Δίνεται η λέξη «**Π Α Ρ Α Σ Τ Α Σ Η**».

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

β) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

**Κ:** Ο αναγραμματισμός αρχίζει με Α και τελειώνει σε Α.

**Λ:** Ο αναγραμματισμός έχει τα σύμφωνα σε συνεχόμενες θέσεις.

**Μ:** Ο αναγραμματισμός δεν έχει δύο Α συνεχόμενα.

10) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = 2xe^{-x}$

α) Να βρείτε το τοπικό ακρότατό της και να το χαρακτηρίσετε.

β) Να δείξετε ότι  $e^x > 2x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις.**

**Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, και στη συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά.

2) Σε μια πτήση με αεροπλάνο το 60% των επιβατών είναι άνδρες και το 40% είναι γυναίκες. Το 25% των ανδρών επιβατών ταξιδεύει για επαγγελματικούς λόγους, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για τις γυναίκες είναι 15%. Επιλέγουμε στην τύχη ένα άτομο από τους επιβάτες της πτήσης αυτής.

α) Να βρείτε την πιθανότητα το άτομο αυτό να ταξιδεύει για επαγγελματικούς λόγους.

β) Αν το άτομο που επιλέξαμε στην τύχη ταξιδεύει για επαγγελματικούς λόγους, να βρείτε την πιθανότητα το άτομο αυτό να είναι άνδρας.

3) Δίνεται η υπερβολή  $xy = c^2$  και τα σημεία της  $A\left(ct, \frac{c}{t}\right)$  με  $t > 0$  και

$B\left(c\rho, \frac{c}{\rho}\right)$  με  $\rho > 0$ .

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής AB είναι η  $x + t\rho y = c(t + \rho)$ .

β) Αν η ευθεία AB τέμνει τους άξονες  $xx'$  και  $yy'$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων αυτών.

γ) Αν η χορδή AB περνά από το σημείο  $(2c, 2c)$  να δείξετε ότι  $t + \rho = 2(t\rho + 1)$ .

δ) Να βρείτε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος  $\Gamma\Delta$ .

- 4) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = -x^2 - x$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = \lambda(x + 1)$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ .  $E_1$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  τον άξονα  $xx'$  και την ευθεία  $(\varepsilon)$ .  $E_2$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $yy'$  και την ευθεία  $(\varepsilon)$ .
- α) Να εκφράσετε τα εμβαδά  $E_1$  και  $E_2$  συναρτήσει του  $\lambda$ .
- β) Να δείξετε ότι η διαφορά των δύο εμβαδών δίνεται από τη σχέση

$$E(\lambda) = E_1 - E_2 = \frac{\lambda}{2} - \lambda^2 + \frac{\lambda^3}{3}$$

- γ) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία η διαφορά των δύο εμβαδών,  $E(\lambda)$  έχει ακρότατη τιμή και να τη χαρακτηρίσετε.

- 5) Δίνεται η συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και για την οποία ισχύει η σχέση  $f(\alpha + \beta - x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό,  $x = \alpha + \beta - u$  να δείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

- β) Με τη βοήθεια της πιο πάνω σχέσης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\pi} x \sin^2 x dx$

Τ Ε Λ Ο Σ