ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 29 Μαΐου 2007
7:30 π.μ. – 10:30 π.μ.

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1.	$\int_0^1 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1$ $= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}$ $= \frac{1}{3}$	
2.	Το (1,2) ανήκει στην $y=\alpha x^2 + 4x \Rightarrow$ $2=\alpha \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 \Rightarrow$ $2=\alpha+4 \Rightarrow$ $\alpha=-2$ $y=-2x^2 + 4x \Rightarrow$ $y'=-4x + 4 \Rightarrow$ $y'=0 \Rightarrow$ $4x=4 \Rightarrow$ $x=1$ $y''=-4<0$ $\Rightarrow$ μέγιστο (1,2)	
3.	$g=-3$ $f=2$, $C=-12$ $K(-g,-f)$ $K(3,-2) \Rightarrow$ $R = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{9+4+12} \Rightarrow$ $R=\sqrt{25} \Rightarrow$ 5 μονάδες	
4.	$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!}$ $= \frac{4!5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!}$ $=35$	

5.	$E'E=2\gamma$ $B'B=2\beta$ $2\gamma=6 \Rightarrow \gamma=3$ $2\beta=8 \Rightarrow \beta=4$ $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ $\alpha^2=16+9$ $\alpha^2=25 \Rightarrow \alpha=5$ $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3}{5}$	
6.	$A+B=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$ $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-5&-10+10\\3-3&-5+6\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow A+B=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $=5A\cdot B$	
7.	$V=\pi\int_0^2 y^2dx$ $=\pi\int_0^2 (x^2+1)^2dx$ $=\pi\int_0^2 (x^4+2x^2+1)dx$ $=\pi\left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right]_0^2$ $=\pi\left[\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+2\right)-(0)\right]$ $=\pi\frac{96+80+30}{15}=\frac{206}{15}\pi$ κ.μ.	
8.	$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ $\frac{1}{20}=\frac{1}{5}\cdot P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{1}{4}$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ $=\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$ $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ $=\frac{1}{5}-\frac{1}{20}=\frac{3}{20}$	

9.

$y=\text{Τοξημ}x \Leftrightarrow x=\text{ημ}y \quad , \quad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{dx}{dy}=\text{συν}y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{συν}y}=\frac{1}{\sqrt{1-\text{ημ}^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

10.

$u=e^x \Rightarrow du=e^x dx$

$du=udx \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{du}{u}$

x	0	$\ell n\sqrt{3}$
u	1	$\sqrt{3}$

$$I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\frac{du}{u}}{u+u^{-1}}$$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{du}{u^2+1}=\text{Τοξεφ}u\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$= \text{Τοξ εφ}\sqrt{3} - \text{Τοξεφ}1$

$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\pi}{12}$

ΜΕΡΟΣ Β

1.

Π.Ο. : $x \epsilon R$

Κοινό σημείο με Ox: $y=0 \Rightarrow x=0$, (0,0)

Σημεία τομής με Oy: $x=0 \Rightarrow y=0$, (0,0)

Ακρότατα

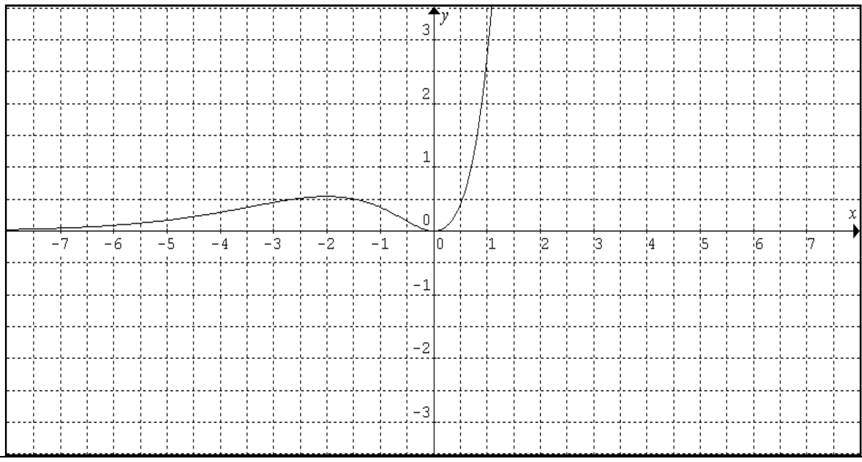
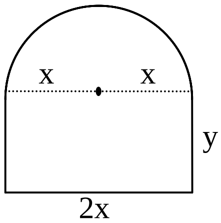
$y' = 2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$

$y' = 0 \Rightarrow x=0, x=-2$ διότι $e^x \neq 0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y		↗		↘		↗	
			max		min		

$x=-2 \Rightarrow y_{max} = 4e^{-2}$ μέγιστο $(-2, 4e^{-2})$

$x=0 \Rightarrow y_{min} = 0$ ελάχιστο (0,0)

	Ασύμπτωτες $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^x = \infty \quad \Rightarrow$ δεν έχει ΟΑ στην περιοχή του +∞ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}} = (\frac{\infty}{\infty}) \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}} = (\frac{-\infty}{-\infty}) \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = 0$ $\Rightarrow$ y=0 είναι ΟΑ στην περοχή του -∞ 	
2.	 Έστω x η ακτίνα του ημικυκλίου και y το πλάτος του ορθογωνίου Π=2x+2y+πx 10=2x+2y+πx $y = \frac{10 - 2x - \pi x}{2}$ $E = 2xy + \frac{\pi x^2}{2}$ $E = 10x - 2x^2 - \frac{\pi x^2}{2}$ $\frac{dE}{dx} = 0$ $10 - 4x - \frac{2\pi x}{2} = 0$ $x = \frac{10}{4 + \pi}$	1 1

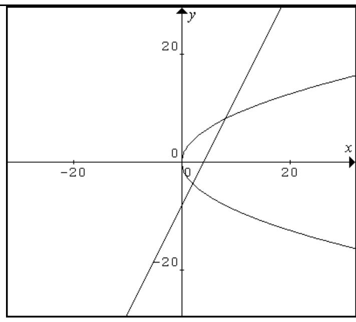
$$\frac{d^2E}{dx^2} = -4 - \pi < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{μέγιστο}$$

$$y = \frac{10 - 2\dfrac{10}{4+\pi} - \pi\dfrac{10}{4+\pi}}{2}$$

$$y = \frac{10}{4+\pi}$$

Το μήκος του παραθύρου πρέπει να είναι $\frac{20}{4+\pi}$ και το πλάτος $\frac{10}{4+\pi}$ μονάδες.

3. $y^2=8x$ $\quad$ $A(2t^2, 4t)$, $\quad$ $B(2\rho^2, 4\rho)$



(α) (ι)

$$\lambda_{AB} = \frac{4\rho - 4t}{2\rho^2 - 2t^2} = \frac{4(\rho - t)}{2(\rho - t)(\rho + t)} = \frac{2}{\rho + t}$$

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{2-4t}{5-2t^2}$$

$$\lambda_{A\Gamma} = \lambda_{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{2-4t}{5-2t^2} = \frac{2}{\rho + t} \quad \Rightarrow \quad \rho + t = 2\rho t + 5$$

(ιι)

Μέσο AB : $\left(\frac{2\rho^2 + 2t^2}{2}, \frac{4\rho + 4t}{2}\right) = (\rho^2 + t^2, 2(\rho + t))$

$$x = \rho^2 + t^2, \qquad y = 2(\rho + t)$$

$$(\rho + t)^2 = \rho^2 + t^2 + 2\rho t$$

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = x + 2\rho t = x + \rho + t - 5 = x + \frac{y}{2} - 5 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x + \frac{y}{2} - 5$$

(β) (ι)

$\Gamma(5,2)$ μέσο του AB : $t^2+\rho^2=5$, $2(t+\rho) =2$ $\Rightarrow$ $t+\rho =1$

$$\lambda_{AB} = \frac{2}{\rho + t} = \frac{2}{1} = 2$$

Εξίσωση της AB : $y-2=2(x-5)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y=2x-8$

(β) (ιι)

Σημεία τομής της $y^2=8x$ και $y=2x-8$: $(8,8)$ και $(2,-4)$

$$E=\int_{-4}^{8}(x_{\varepsilon}-x_{\pi})dy=\int_{-4}^{8}\left(\frac{y+8}{2}-\frac{y^2}{8}\right)dy\ =$$

$$E=\left[\ \frac{y^2}{4}+4y-\frac{y^3}{24}\ \right]_{-4}^{8}=36 \text{ τ.μ.}$$

4. Έστω :

K το ενδεχόμενο να πήρε κόκκινη μπάλα
K_i το ενδεχόμενο να πήρε κόκκινη μπάλα στην i- επιλογή i=1,2
Π_i το ενδεχόμενο να πήρε πράσινη μπάλα στην i- επιλογή i=1,2
A_1 το ενδεχόμενο να πήρε άσπρη μπάλα στην πρώτη επιλογή

(α) (ι) ‘Εστω Δ το ενδεχόμενο να πήρε δύο μπάλες

$$P(\Delta)=\frac{1}{10}$$

ή

$$\begin{aligned}P(\Delta)&=P(A_1\cap K_2)+P(A_1\cap \Pi_2)\\&=P(A_1)P(K_2/A_1)+P((A_1)P(\Pi_2/A_1)\\&=\frac{1}{10}\frac{4}{9}+\frac{1}{10}\frac{5}{9}=\frac{1}{10}\end{aligned}$$

(ιι)

$$\begin{aligned}P(K)&=P(K_1)+P(A_1\cap K_2)\\&=P(K_1)+P((A_1)P(K_2/A_1)\\&=\frac{4}{10}+\frac{1}{10}\frac{4}{9}=\frac{4}{9}\end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned}P(K_1/K)&=\frac{P(K_1\cap K)}{P(K)}\\&=\frac{P(K_1)P(K/K_1)}{P(K)}\\&=\frac{\frac{4}{10}\bullet 1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{10}\end{aligned}$$

5.

(α) $f(-x)=f(x) \Rightarrow f'(-x)(-x)'=f'(x) \Rightarrow -f'(-x)=f'(x) \Rightarrow f'(-x)=-f'(x)$

(β) $f(x+\alpha)=f(x) \Rightarrow f'(x+\alpha)(x+\alpha)'=f'(x) \Rightarrow f'(x+\alpha)=f'(x)$

(γ)

$$\int_0^{\alpha} x^2 f'(x)dx = \left[x^2 f(x)\right]_0^{\alpha} - 2\int_0^{\alpha} xf(x)dx$$

$$= \alpha^2 f(\alpha) - 2\int_0^{\alpha} xf(x)dx$$

$$= -2\int_0^{\alpha} xf(x)dx \qquad \text{διότι } f(\alpha)=f(0)=0$$

(δ) $x=\alpha-y$ επομένως $dx=-dy$

$$\int_0^{\alpha} xf(x)dx = \int_{\alpha}^{0}(\alpha-y)f(\alpha-y)(-dy)$$

$$= \int_0^{\alpha}(\alpha-y)f(-y+\alpha)dy$$

$$= \int_0^{\alpha}(\alpha-y)f(-y)dy \qquad \text{διότι } f(-y+\alpha)=f(-y)$$

$$= \int_0^{\alpha}(\alpha-x)f(x)dx \qquad \text{διότι } f(-x)=f(x)$$

$$= \alpha\int_0^{\alpha} f(x)dx - \int_0^{\alpha} xf(x)dx \Rightarrow$$

$$2\int_0^{\alpha} xf(x)dx = \alpha\int_0^{\alpha} f(x)dx$$

(ε) $$\int_0^{\alpha} x^2 f'(x)dx = -2\int_0^{\alpha} xf(x)dx \qquad \text{από το (γ)}$$

$$= -\alpha\int_0^{\alpha} f(x)dx \qquad \text{από το (δ)}$$