

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2007

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
4-ΩΡΟ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τρίτη, 12 Ιουνίου 2007

7:30 – 10:30

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α

1	$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$	
2	$\bar{x} = \frac{12+16+13+18+11}{5} = \frac{70}{5} = 14$	
3	$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 100$ $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 83 = 0$	
4	$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{4 - x^2} = \frac{0}{0}$ A.M. $\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 2}^{DLH} \frac{2x-2}{-2x} = -\frac{1}{2}$ ή $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{4 - x^2} = \frac{0}{0}$ A.M. $\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(2-x)(2+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x}{2+x} = -\frac{1}{2}$	
5	$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$	
6	$y = x \cdot \eta\mu 2x$ $\frac{dy}{dx} = \eta\mu 2x + 2x \sigma\upsilon\nu 2x$	

7

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 12$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y''	-	0	+
y	⌒		⌒
	Σ.Κ		

Για $x = 2 \Rightarrow y = 3$ Σημείο καμπής (2,3)

8

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(A \cup B) = \frac{2}{5}, P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$\alpha) P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\beta) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{6} + P(B) - \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\gamma) P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

9	$y = \alpha x + \beta x^3 \quad (1, 2) \text{ ακρότατο}$ $\frac{dy}{dx} = \alpha + 3\beta x^2$ <p>Για $x = 1, y = 2 \Rightarrow \alpha + \beta = 2$</p> <p>Για $x = 1, \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha + 3\beta = 0}$</p> $-2\beta = 2 \Rightarrow \beta = -1$ $\alpha - 1 = 2 \Rightarrow \alpha = 3$	
10	$\int_0^4 \frac{6x}{\sqrt{x^2+9}} dx \quad \text{Θέτω } u = \sqrt{x^2+9} \Rightarrow u^2 = x^2+9$ $2u du = 2x dx$ <p>Για $x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{9} = 3$</p> <p>Για $x = 4 \Rightarrow u = \sqrt{25} = 5$</p> $\int_0^4 \frac{6x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int_3^5 \frac{6u}{u} du = [6u]_3^5 = 6 \cdot 5 - 6 \cdot 3 = 12$	

ΜΕΡΟΣ Β

1 $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$

α) Πεδίο ορισμού: Πρέπει $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ άρα $x \in \mathbb{R} - \{2\}$

β) Σημεία τομής με τους άξονες:

Αν $y=0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

Άρα τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $(-2, 0)$ και $(1, 0)$

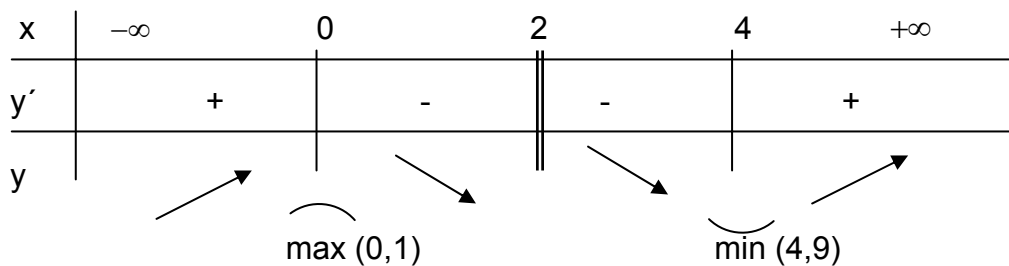
Αν $x=0 \Rightarrow y = \frac{0 - 2}{0 - 2} = 1$

Άρα τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, 1)$

γ) Τοπικά ακρότατα και μονοτονία:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2 + x - 2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$$



δ) Ασύμπτωτες

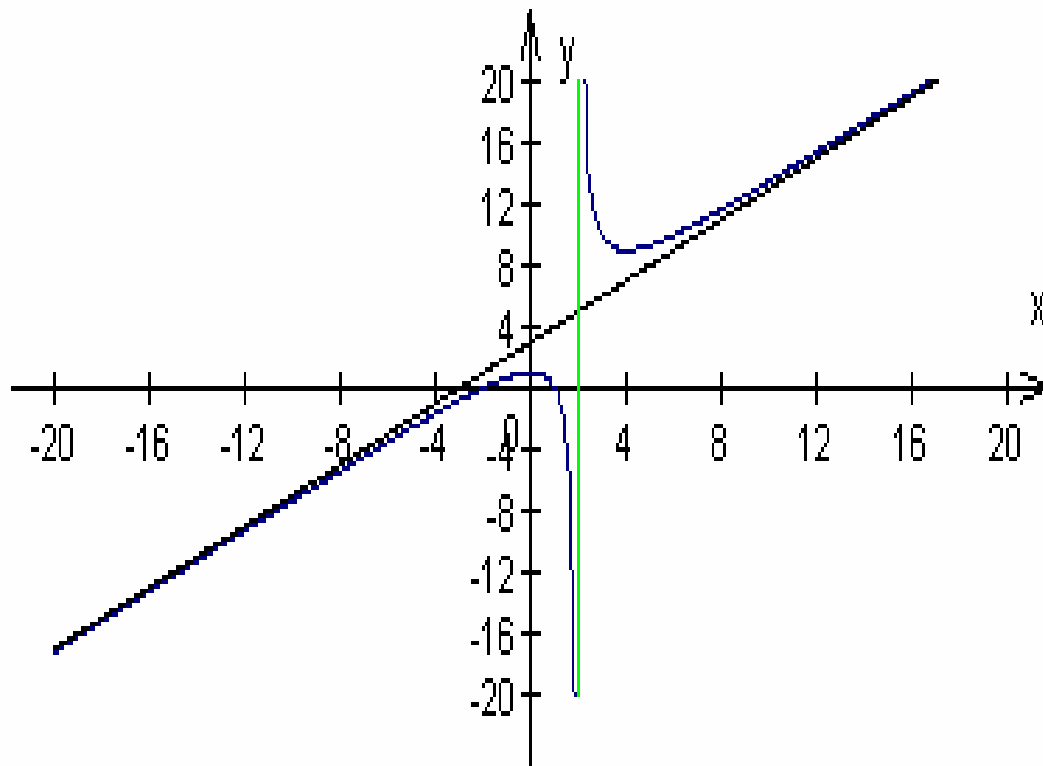
Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} &= \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 2} &= \frac{4}{0^+} = +\infty \end{aligned} \right\} x = 2 \text{ Κ.Α.}$$

Πλάγια ασύμπτωτη

$$(x^2 + x - 2) \div (x - 2) = x + 3 + \frac{4}{x - 2} \Rightarrow y = x + 3 \text{ Π.Α}$$

x	0	-3
y	3	0



2

α) $x_{\varepsilon} = 13$

β) 12,13,13,13,15,**15**,16,16,17,17,18

$x_{\delta} = 15$

γ)

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
12	1	12	-3	9	9
13	3	39	-2	4	12
15	2	30	0	0	0
16	2	32	1	1	2
17	2	34	2	4	8
18	1	18	3	9	9
	11	165			40

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{165}{11} = 15$$

$$\delta) \sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i}} = \sqrt{\frac{40}{11}} = 1,9$$

3

A,A,A,Σ,Σ,N,T,H

$$\alpha) \text{ i) } M_8^e = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = 3360$$

$$\text{ii) } \Sigma \text{ ----- } \Sigma \quad M_6^e = \frac{6!}{3!} = 120$$

$$\text{iii) } \text{Αρχίζουν από A : } M_7^e = \frac{7!}{2! \cdot 2!} = 1260$$

$$\text{Αρχίζουν από H : } M_7^e = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$$

1260 + 420 = 1680 αναγραμματισμοί αρχίζουν από φωνήεν.

β) A : αναγραμματισμός που αρχίζει από φωνήεν

$$P(A) = \frac{1680}{3360} = \frac{1}{2}$$

4

$$x^3 + y^3 = 2xy$$

α) i)

$$\left. \begin{array}{l} x^3 + y^3 = 1+1=2 \\ 2xy = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{η καμπύλη περνά από το σημείο } P(1,1)$$

ii)

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 2y + 2x \frac{dy}{dx}$$

$$(3y^2 - 2x) \frac{dy}{dx} = 2y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}$$

$$\text{Για } x=1 \text{ και } y=1 \Rightarrow \lambda_\epsilon = \frac{2-3}{3-2} = -1$$

β)

$$y - y_1 = \lambda_\epsilon (x - x_1)$$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$

$$x + y - 2 = 0$$

5

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (1+2\eta\mu x)^2 dx &= \int_0^{\pi} (1+4\eta\mu x+4\eta\mu^2 x) dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(1+4\eta\mu x+4\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\pi} (3+4\eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu 2x) dx \\ &= [3x-4\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu 2x]_0^{\pi} \\ &= 3\pi+4+4=3\pi+8\end{aligned}$$