

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2006

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 29 Μαΐου 2006

7.30 π.μ. - 10.30 π.μ.

ΤΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Αποτελείται από 10 ασκήσεις.

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα : $\int (3x - \eta\mu x) dx$.
2. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών , των εστιών και την εκκεντρότητα της έλλειψης.
3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = 6x^2$, τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ και τον άξονα των x .
4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(x + 1)}{e^x - 1}$.
5. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων;
6. Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(3, 5)$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το AB .
7. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
 - (α) Να βρείτε τον πίνακα $\Gamma = A \cdot B$.
 - (β) Να βρείτε τον πίνακα B^{-1} .

8. Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει:
 $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{53}{60}$ και $P(B') = \frac{1}{4}$.
Να βρείτε τις πιθανότητες $P(B)$, $P(A \cap B)$ και $P(A - B)$.
9. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4ax$ στο σημείο της (x_1, y_1) είναι η $y_1 y = 2a(x + x_1)$.
10. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = x^2 + 1$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$.

ΜΕΡΟΣ Β'

Αποτελείται από 5 ασκήσεις.

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, να την παραστήσετε γραφικά.
2. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y = \sqrt{x}$, $x > 0$ και το σημείο $A(1, 0)$.
(α) Να εκφράσετε σε συνάρτηση του x την απόσταση του σημείου A από τυχαίο σημείο (x, y) της καμπύλης.
(β) Να βρείτε το σημείο της καμπύλης που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A και να βρείτε την ελάχιστη αυτή απόσταση.
3. Μια βιομηχανία κατασκευάζει αυτοκίνητα σε δύο εργοστάσια. Το 3% των αυτοκινήτων που κατασκευάζει το εργοστάσιο A και το 1% των αυτοκινήτων που κατασκευάζει το εργοστάσιο B είναι ελαττωματικά. Το 2005 το εργοστάσιο A κατασκεύασε 15000 αυτοκίνητα και το εργοστάσιο B 5000 αυτοκίνητα. Ελέγχουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο της βιομηχανίας από την παραγωγή του 2005.
(α) Να βρείτε την πιθανότητα το αυτοκίνητο που ελέγξαμε να έχει κατασκευαστεί από το εργοστάσιο A .
(β) Να βρείτε την πιθανότητα το αυτοκίνητο που ελέγξαμε να είναι ελαττωματικό.
(γ) Αν το αυτοκίνητο που ελέγξαμε είναι ελαττωματικό, ποια η πιθανότητα να έχει κατασκευαστεί από το εργοστάσιο A ;

4. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g ορισμένες στο διάστημα $[0, \pi]$. Αν για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x) = f(\pi - x)$ και $g(x) + g(\pi - x) = \pi$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - y$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi f(x)g(x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x)dx$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{x \eta \mu x}{1 + \sigma \upsilon \nu^2 x} dx$.

5. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.

(α) Να δείξετε ότι το σχήμα, στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών της έλλειψης με κλίση λ , $\lambda \neq 0$, είναι ευθεία (ε) με εξίσωση

$$y = -\frac{\beta^2}{\lambda \alpha^2} x.$$

(β) Η ευθεία (ε) τέμνει την έλλειψη σε δύο σημεία. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της έλλειψης σε οποιοδήποτε από αυτά έχει κλίση λ .

-- ΤΕΛΟΣ --