

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.α) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

β) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$;

Μονάδες 3

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ και $f(α) \neq f(β)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 6,5

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

B. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει:

$$x(f(x) - 2x + 2) = \eta\mu x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w τέτοιοι, ώστε $w = \frac{z-3i}{1+i}$.

A. α) Αν $w=2-2i$, τότε το μέτρο του μιγαδικού z είναι:

- A) 3 B) 4 Γ) 5 Δ) 2

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 5

β) Αν $|w| = 2\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 7,5

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

B. α) Αν $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbf{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{x + y - 3}{2}, \quad \operatorname{Im}(w) = \frac{-x + y - 3}{2}$$

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων M των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$\operatorname{Arg}(w) = \frac{\pi}{4}$$

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - 2x$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι $\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} με

$$f''(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, \quad f(0) = 1 \text{ και } f'(0) = 0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x) = \frac{f'(x) + f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή

Μονάδες 8

β) $(f(x) \cdot e^x)' = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$

Μονάδες 8

γ) ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Μονάδες 9