Θέμα Α

Α1. Θεωρία (ορισμός) – Σελίδα 234 του σχολικού βιβλίου

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με παράγουσα τη συνάρτηση F. Τη σταθερή διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α ως το β και το συμβολίζουμε με:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

Επομένως, ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\left[F(x)\right]_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha)$

Α2.

α)	Σωστό
β)	Σωστό
γ)	Λάθος
δ)	Λάθος
ε)	Σωστό

Α3.

α) $\int_\alpha^\beta \eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_\alpha^\beta=(-\sigma\upsilon\nu\beta)-(-\sigma\upsilon\nu\alpha)=-\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c μια σταθερά, τότε:

$(c\cdot f)'(x)=c\cdot f'(x)$

γ) Αν $\alpha\in\mathbb{R}^*$ και $x>0$, τότε:

$\left(x^\alpha\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$

Θέμα Β

Β1.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\alpha^2x+\ell n x\right)=\alpha^2\cdot1+\ell n1=\alpha^2+0=\alpha^2$

Β2.

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2-x\right)=1^2-1=1-1=0$

και $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=\sqrt{1+3}-2=\sqrt{4}-2=2-2=0$,

προκύπτει στο όριο $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Άρα:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-x}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot(x-1)}{\sqrt{x+3}-2} == \lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{1} = \lim_{x\to 1^+}\left[x\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)\right] = 1\cdot\left(\sqrt{1+3}+2\right) = 1\cdot\left(\sqrt{4}+2\right) = 1\cdot(2+2) = 1\cdot 4 = 4$$

Β3.

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$, πρέπει να ισχύει:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

Άρα, $\alpha^2 = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \sqrt{4}$ ή $\alpha = -\sqrt{4}$

$\Leftrightarrow \alpha = 2$ ή $\alpha = -2$

Θέμα Γ

Γ1.

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 25+17+6+2 = 50$$

$$f_i\% = 100\cdot f_i = 100\cdot\frac{\nu_i}{\nu} = \frac{100\cdot\nu_i}{50} = 2\cdot\nu_i$$

Άρα:

- $f_1\% = 2\cdot 25 = 50$
- $f_2\% = 2\cdot 17 = 34$
- $f_3\% = 2\cdot 6 = 12$
- $f_4\% = 2\cdot 2 = 4$

Επομένως, ο ζητούμενος πίνακας είναι:

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	**Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων)** ν_i	**Σχετική συχνότητα** $f_i\%$	$x_i\nu_i$
6	25	50	150
10	17	34	170
15	6	12	90
20	2	4	40
Σύνολα	$\nu = 50$	100	450

Γ2.

Η μέση τιμή είναι:

$$\bar{x}=\frac{\nu_1x_1+\nu_2x_2+\nu_3x_3+\nu_4x_4}{\nu}=\frac{\text{Άθροισμα } x_i\nu_i}{\nu}=\frac{450}{50}=9 \text{ εκατοντάδες €.}$$

Γ3.

Το πολύ 1000 € σημαίνει το πολύ 10 εκατοντάδες €, δηλαδή σύμφωνα με το δείγμα μας, 6 εκατοντάδες € ή 10 εκατοντάδες €.
Άρα, το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν μισθό το πολύ 1000 € είναι:

$f_1\%+f_2\%=50+34=84$, δηλαδή 84%

Γ4.

Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα:

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i	$\bar{x}-x_i$	$(\bar{x}-x_i)^2$	$\nu_i\cdot(\bar{x}-x_i)^2$
6	25	3	9	225
10	17	-1	1	17
15	6	-6	36	216
20	2	-11	121	242
Σύνολα	$\nu=50$			700

Άρα, η διακύμανση του δείγματος είναι:

$$s^2=\frac{\nu_1\cdot(\bar{x}-x_1)^2+\nu_2\cdot(\bar{x}-x_2)^2+\nu_3\cdot(\bar{x}-x_3)^2+\nu_4\cdot(\bar{x}-x_4)^2}{\nu}=\frac{\text{Άθροισμα } \nu_i(\bar{x}-x_i)^2}{\nu}=\frac{700}{50}=14$$

Δηλαδή, $s^2=14 \ (\text{εκατοντάδες €})^2$

Θέμα Δ

Δ1.

Η συνάρτηση $f(x)=(x-2)^2(x+\alpha)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x)=\left[(x-2)^2\cdot(x+\alpha)\right]'=\left[(x-2)^2\right]'\cdot(x+\alpha)+(x-2)^2\cdot(x+\alpha)'=$$

$$=2\cdot(x-2)\cdot(x-2)'\cdot(x+\alpha)+(x-2)^2\cdot\Big((x)'+(\alpha)'\Big)=$$

$$=2(x-2)\Big((x)'-(2)'\Big)(x+\alpha)+(x-2)^2(1+0)=$$

$$=2(x-2)(x+\alpha)+(x-2)^2=$$

$$=(x-2)\left[2(x+\alpha)+(x-2)\right]=$$

$$=(x-2)(2x+2\alpha+x-2)=$$

$$=(x-2)(3x+2\alpha-2) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ2.

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 4$ του πεδίου ορισμού της $D_f = \mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat, ισχύει:

$$f'(4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (4-2)(3\cdot 4 + 2\alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(12 + 2\alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(10 + 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10 + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha = -10 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\alpha}{2} = \frac{-10}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha = -5$$

Δ3.

Για $\alpha = -5$:

$\boxed{f(x) = (x-2)^2(x-5)}$

και

$f'(x) = (x-2)(3x + 2\cdot(-5) - 2) \Leftrightarrow f'(x) = (x-2)(3x-12) \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = 3(x-2)(x-4)}$

Λύνουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x-2=0 \quad \text{ή} \quad x-4=0$$
$$x=2 \qquad\qquad x=4$$

Ο πίνακας προσήμων της f' – μονοτονίας της f έχει ως εξής:

x	$-\infty$	2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗		↘		↗	

Άρα η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$,
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 4]$ και
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4, +\infty)$

Η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 2$, το τοπικό μέγιστο $f(2) = (2-2)^2(2-5) = 0\cdot(-3) = 0$ και
- τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 4$, το $f(4) = (4-2)^2(4-5) = 2^2\cdot(-1) = 4\cdot(-1) = -4$

Δ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-h(x)$

$$\varphi(x)=\left(3x^2-12x\right)-\left(6x-24\right)$$
$$\varphi(x)=3x^2-12x-6x+24$$
$$\varphi(x)=3x^2-18x+24$$

Λύνουμε την εξίσωση:

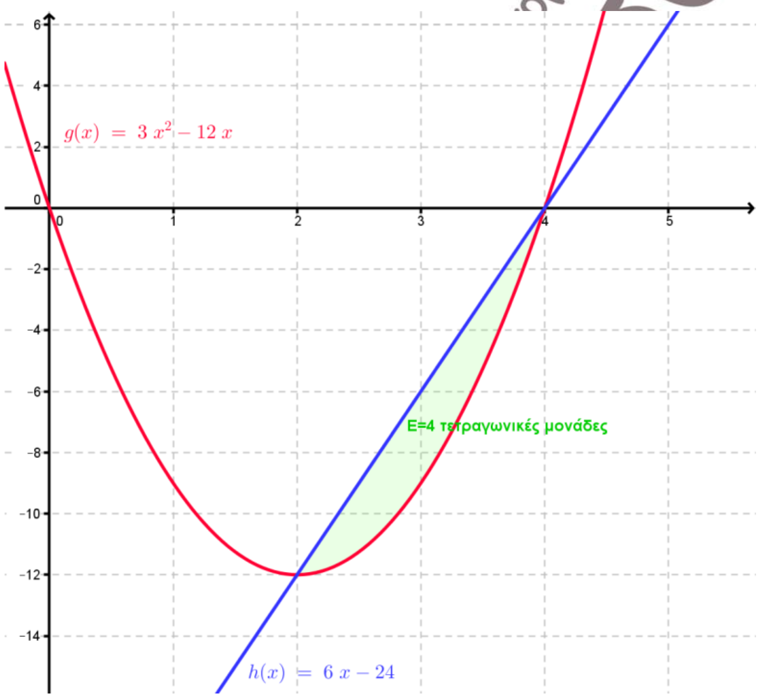
$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-18x+24=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+8=0$$
$$\Delta=6^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4>0$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{6\pm2}{2}=\begin{cases}\dfrac{6-2}{2}=\dfrac{4}{2}=2\\[2ex]\dfrac{6+2}{2}=\dfrac{8}{2}=4\end{cases}$$

Ο πίνακας προσήμων της $\varphi(x)$ είναι:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Επομένως το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$E=\int_2^4\left|g(x)-h(x)\right|dx=\int_2^4\left|\varphi(x)\right|dx=-\int_2^4\varphi(x)\,dx=-\int_2^4\left(3x^2-18x+24\right)dx=-\left[x^3-9x^2+24x\right]_2^4=$$



$$=\left[-x^3+9x^2-24x\right]_2^4=$$
$$=\left(-4^3+9\cdot4^2-24\cdot4\right)-\left(-2^3+9\cdot2^2-24\cdot2\right)=$$
$$=\left(-64+9\cdot16-24\cdot4\right)-\left(-8+9\cdot4-24\cdot2\right)=$$
$$=\left(-64+144-96\right)-\left(-8+36-48\right)=$$
$$=\left(-16\right)-\left(-20\right)=$$
$$=-16+20=$$
$=4$ τετραγωνικές μονάδες.