# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
## ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄
**20 ΜΑΪΟΥ 2013**
## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28
**Α2**. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 14
**Α3**. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 87
**Α4.** **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Λ

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.**

- $$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = \frac{1}{4}.$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x όταν x = 1, ισούται με $f'(1)$.

  Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε x > 0 με

$$f'(x) = \left(\frac{x}{3}\ln x\right)' = \left(\frac{x}{3}\right)'\ln x + \frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3}\ln x + \frac{1}{3}.$$

  Για x = 1 έχουμε:

$$f'(1) = \frac{1}{3}\ln 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

**Β2.** Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$. Επειδή $\{\omega_3\} \subseteq A'$ είναι $P(\omega_3) \le P(A')$. Όμως $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$ οπότε $\frac{1}{3} \le P(A')$. $P(A') \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) \ge \frac{1}{4}$.

Πράγματι, $\{\omega_1\} \subseteq A$ άρα $P(\omega_1) \le P(A)$. Όμως $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$, άρα $P(A) \ge \frac{1}{4}$.

**Β3.**

$P(A') = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{4}$.

Όμως $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4)$ και επειδή $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$

προκύπτει $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + P(\omega_4) \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$.

Είναι $P(\Omega) = 1$, άρα $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$

και επειδή $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$, $P(\omega_4) = 0$ προκύπτει

$P(\omega_2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$.

Τα Α − Β, Β − Α είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, άρα

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right] = P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) =$
$= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) \quad (1)$

Όμως $A = \{\omega_1, \omega_4\}$, άρα $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_4) = \frac{1}{4}$.

$B = \{\omega_1, \omega_3\}$, άρα $P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$.

$A \cap B = \{\omega_1\}$, άρα $P(A\cap B) = P(\omega_1) = \frac{1}{4}$.

Από την (1) βρίσκουμε ότι:

$P\left[(A-B)\cup(B-A)\right] = P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$.

β΄ τρόπος: Α − Β = $\{\omega_4\}$, Β − Α = $\{\omega_3\}$ άρα

$P\left[(A\cup B)\cup(B-A)\right] = P\left(\{\omega_3\}\cup\{\omega_4\}\right) =$
$= P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$.

$P(A'-B') = P(A') - P(A'\cap B') = P(A') - P\left[(A\cup B)'\right] = 1 - P(A) - 1 + P(A\cup B) =$
$= P(A\cup B) - P(A) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) - P(A) =$
$= P(B) - P(A\cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

β΄ τρόπος: Είναι Α΄ = {$\omega_2$, $\omega_3$} και Β΄ = {$\omega_2$, $\omega_4$}
οπότε Α΄ − Β΄ = {$\omega_3$}. Άρα Ρ(Α΄ − Β΄) = Ρ($\omega_3$) = 1/3).

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Αν $c$ το πλάτος της κάθε κλάσης, τότε η τέταρτη κλάση θα είναι [50 + 3$c$, 50 + 4$c$). Αφού η κεντρική τιμή της είναι 85, προκύπτει ότι

$$\frac{50+3c+50+4c}{2}=85 \Leftrightarrow 50+\frac{7c}{2}=85 \Leftrightarrow \frac{7c}{2}=35 \Leftrightarrow c=10.$$

**Γ2.** Αφού η διάμεσος είναι $\delta = 75 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + \frac{f_3}{2} = 0,5$.

Επίσης, $\bar{x} = 74 \Leftrightarrow 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74$. Επίσης ισχύουν $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$ καθώς και $f_4 = 2f_3$ άρα,

$$\left.\begin{array}{l} f_1 + f_2 + \dfrac{f_3}{2} = 0,5 \\ 55f_1 + 65f_2 + 75f_3 + 85f_4 = 74 \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \\ f_4 = 2f_3 \end{array}\right\}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $f_1 = 0,1$ $f_2 = 0,3$ $f_3 = 0,2$ $f_4 = 0,4$.
Έτσι προκύτει ο παρακάτω πίνακας:

| Κλάσεις | $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|---|
| [50, 60) | 55 | 0,1 |
| [60, 70) | 65 | 0,3 |
| [70, 80) | 75 | 0,2 |
| [80, 90) | 85 | 0,4 |
| Σύνολο | 280 | 1 |

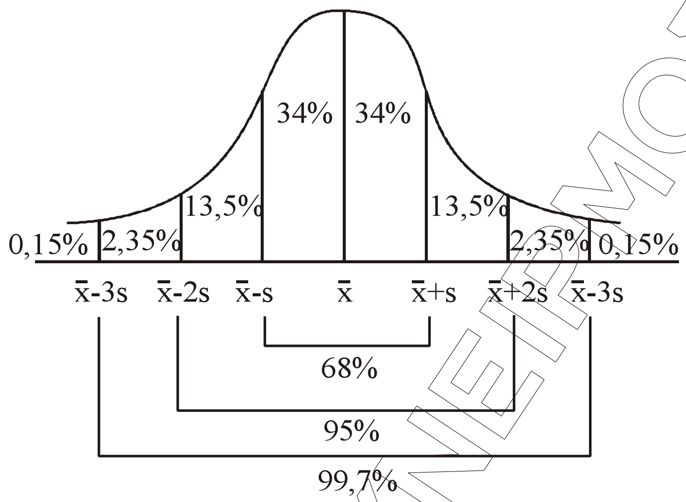
**Γ3.** Έχουμε $\bar{x} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i = 74\nu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} x_i \nu_i + x_4\nu_4 = 74\nu \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} x_i \nu_i = 74\nu - x_4\nu_4 \quad (1)$$

Επομένως η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 είναι:

$$\overline{x'} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_1\nu_1}{\nu_1+\nu_2+\nu_3} \overset{(1)}{=} \frac{74\nu - x_4\nu_4}{\nu - \nu_4} \overset{:\nu}{=} \frac{74 - x_4 f_4}{1 - f_4} = \frac{74 - 85\cdot 0,4}{1-0,4} = \frac{40}{0,6} = \frac{200}{3}$$

**Γ4.** Αφού η κατανομή είναι κανονική




και το 2,5 % των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74, θα είναι $\bar{x}+2s=74$. Επίσης για το 16% των παρατηρήσεων που είναι το πολύ 68 θα είναι θα είναι $\bar{x}-s=68$, όπου $\bar{x}, s$ η μέση τιμή και τυπική απόκλιση, αντίστοιχα, των κ παρατηρήσεων.

Άρα θα είναι $\bar{x}+2s=74$, $\bar{x}-s=68$.

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει $\delta = 2$ και $\bar{x}=70$.

Ο συντελεστής μεταβολής των κ παρατηρήσεων είναι $\mathrm{CV}=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{70}<\frac{1}{10}$.

Άρα το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** $f'(x)=\ln x+1,\ x>0$

Η εφαπτόμενη της f στο στο σημείο (1, f(1)) είναι:

(ε): $y=\lambda x+\beta$ όπου $\lambda=f'(1)=1$.

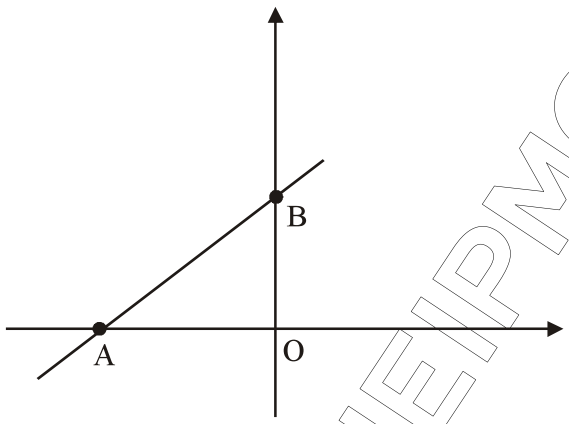
Επειδή η (ε) διέρχεται από το (1, f(1)) αλλά

$f(1)=1+\beta \Leftrightarrow \beta=f(1)-1=1\ln 1+\kappa-1=\kappa=1$

η (ε) γίνεται $y=x+\kappa-1$.

Τα σημεία Α, Β στα οποία η (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι Α(1-κ, 0) και Β(0, κ-1) αντίστοιχα.

Το τρίγωνο ΟΑΒ έτσι έχει εμβαδόν: $\mathrm{E}=\frac{1}{2}(\mathrm{OA})(\mathrm{OB})$ άρα




$$E = \frac{|1-\kappa| \bullet |\kappa - 1|}{2} = \frac{(\kappa-1)^2}{2}$$

Δίνεται Ε< 2, άρα $\frac{(\kappa-1)^2}{2} < 2 \Leftrightarrow |\kappa - 1|^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < \kappa - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < \kappa < 3$

Όμως κ ακέραιος με κ>1, άρα κ= 2.

**Δ2.**

α) Επειδή κ= 2 η (ε) γίνεται $y = x + 1$

Επίσης από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου είναι:

$\bar{y} = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow 31 = \bar{x} + 1 \Leftrightarrow \bar{x} = 30$.

β) Είναι $31 = \frac{(x_1+3)+\ldots+(x_{20}+3)+x_{21}+\ldots+x_{35}+(x_{36}-\lambda)+\ldots+(x_{50}-\lambda)}{50} \Leftrightarrow$

$\sum_{\iota=1}^{50} x_i + 60 - 15\lambda = 31 \bullet 50 \Leftrightarrow 30 \bullet 50 + 60 - 15\lambda = 30 \cdot 50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 60 - 15\lambda = 50 \Leftrightarrow 10 = 15\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

**Δ3**. Είναι f΄(x) = ln x + 1, x > 0.

Έτσι έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών

| x | 0 | | 1/e | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f΄(x) | | – | 0 | + | |
| f(x) | | ↘ | | ↗ | |

Προκύπτει $\quad \min f : f(1/e) = 2 - \frac{1}{e} = \frac{2e-1}{e} > 0$

Στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$.

Επειδή $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ προκύπτει: $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 < f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$.

Έτσι $R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e + 2 - 0 = e + 2$.

Από τη δοσμένη σχέση $a^{a} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = e^{7}$ προκύπτει
$\ln(a^{a} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma}) = \ln e^{7} \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta + \gamma \ln \gamma = 7$
$\Leftrightarrow f(\alpha) - 2 + f(\beta) - 2 + f(\gamma) - 2 = 7 \Leftrightarrow f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) = 13$.

Έτσι: $\overline{x} = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e) + f'\left(\frac{1}{e}\right)}{5} =$
$= \frac{13 + e + 2}{5} = \frac{15 + e}{5}$.

**Δ4.** α) Για το ενδεχόμενο Α έχουμε:

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t > -1 \Leftrightarrow \ln t > \ln\frac{1}{e} \overset{(\ln x \uparrow)}{\Leftrightarrow} t > \frac{1}{e}$.

Άρα $A = \{t_{11}, t_{12}, t_{13} \dots, t_{30}\}$.

$N(A) = 20$ άρα $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

β) Για το ενδεχόμενο Β έχουμε:
$f(t) > f(t') + 1 \Leftrightarrow t \ln t + 2 > 1 + \ln t + 1 \Leftrightarrow (t-1)\ln t > 0$.
Άρα $\{\, t - 1 < 0$ και $\ln t < 0 \,\}$ ή $\{\, t - 1 > 0$ και $\ln t > 0 \,\}$
Η δεύτερη περίπτωση δεν μπορείν να ισχύει διότι $t \in \Omega$, άρα t< 1.
Άρα 0< t < 1, άρα $\mathrm{B} = \{t_{1}, t_{2}, t_{13} \dots, t_{29}\}$.

Έτσι $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\, t_{11}, t_{12}, t_{13} \dots, t_{29} \,\}$ και άρα $P(A \cap B) = \frac{\mathrm{N}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{19}{30}$.