Θέμα Α

Α1. Θεωρία (ορισμός) – Σελίδα 81 του σχολικού βιβλίου

Διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ονομάζεται:

- Η μεσαία παρατήρηση αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό
- Το ημιάθροισμα των μεσαίων παρατηρήσεων αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιο.

Α2.

α)	Σωστό
β)	Σωστό
γ)	Λάθος
δ)	Σωστό
ε)	Σωστό

Α3.

α) $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx = [\ell nx]_\alpha^\beta = \ell n\beta - \ell n\alpha$, με $\beta > \alpha > 0$

β) $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

γ) $\int_\alpha^\beta c dx = [cx]_\alpha^\beta = c\beta - c\alpha = c(\beta - \alpha)$, με c σταθερά και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Θέμα Β

Β1.

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu$$
$$6 + 5 + 4 + \kappa + 2\kappa + 1 = 25$$
$$\kappa + 2\kappa = 25 - 6 - 5 - 4 - 1$$
$$3\kappa = 9$$
$$\frac{3\kappa}{3} = \frac{9}{3}$$
$$\kappa = 3$$

Β2.

Για $\kappa = 3$:

	Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $(\%)$ $f_i\%$	$x_i\nu_i$
$t_1, \dots, t_6$ →	**1**	6	6	24	6
$t_7, \dots, t_{11}$ →	**2**	5	11	20	10
$t_{12}, \dots, t_{15}$ →	**3**	4	15	16	12
$t_{16}, \dots, t_{18}$ →	**4**	3	18	12	12
$t_{19}, \dots, t_{25}$ →	**5**	7	25	28	35
	Σύνολα	25		100	75

Β3.

<u>Η μέση τιμή είναι:</u>

$$\bar{x}=\frac{\nu_1x_1+\nu_2x_2+\nu_3x_3+\nu_4x_4+\nu_5x_5}{\nu}=\frac{\text{Άθροισμα } x_i\nu_i}{\nu}=\frac{75}{25}=3 \text{ ημέρες διαβάσματος}$$

<u>Για τη διάμεσο:</u>

Είναι $\nu=25$ (περιττός), άρα:

Η διάμεσος ισούται με τη μεσαία, δηλαδή τη 13η παρατήρηση. Από τις αθροιστικές συχνότητες N_i, προκύπτει ότι οι 12η, η 13η, η 14η και η 15η παρατηρήσεις είναι ίσες όλες με 3.

25 παρατηρήσεις		
12 παρατηρήσεις $t_1,t_2,\ldots,t_{12}$	t_{13}	12 παρατηρήσεις $t_{14},t_{15},\ldots,t_{25}$

Άρα $\delta=t_{13}=3$

Β4.

Οι μαθητές που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες (δηλαδή 3 ή 4 ή 5 ώρες) ημερησίως είναι σε ποσοστό $f_3\%+f_4\%+f_5\%=16+12+28=56$, δηλαδή 56%

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1.

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\alpha x^2+\beta x\right)=\alpha\cdot1^2+\beta\cdot1=\alpha+\beta$$

Γ2.

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=1-1=0$

και $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\sqrt{x+3}-2\right)=\sqrt{1+3}-2=\sqrt{4}-2=2-2=0$,

προκύπτει στο όριο $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ η απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Άρα:

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-2^2}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)\cdot\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{1}=\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt{x+3}+2\right)=\sqrt{1+3}+2=\sqrt{4}+2=2+2=4$$

Γ3.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, θα ισχύει:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

Άρα, $\alpha + \beta = 4 \quad (1)$

Επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(-1,2)$, θα ισχύει:

$$f(-1) = 2$$
$$\alpha \cdot (-1)^2 + \beta \cdot (-1) = 2$$
$$\alpha \cdot 1 - \beta \cdot 1 = 2$$
$$\alpha - \beta = 2 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει σύστημα με αγνώστους τα α και β:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \quad (+)$$

$$2\alpha = 6$$

$$\frac{2\alpha}{2} = \frac{6}{2}$$

$$\alpha = 3$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1), προκύπτει: $3 + \beta = 4$

$$\beta = 4 - 3$$

$$\beta = 1$$

Θέμα Δ

Δ1.

$$\int_\alpha^\beta (3x^2 - 2x - 1)dx = 3 \cdot \int_\alpha^\beta x^2 dx - 2\int_\alpha^\beta x dx - \int_\alpha^\beta 1 dx = 3 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta - 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta - [x]_\alpha^\beta =$$

$$= \left[3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - x\right]_\alpha^\beta = \left[x^3 - x^2 - x\right]_\alpha^\beta$$

Άρα, οι παράγουσες της συνάρτησης f είναι της μορφής:

$F(x) = x^3 - x^2 - x + c$

Όμως, $F(0) = 1$, άρα:

$$0^3 - 0^2 - 0 + c = 1$$
$$c = 1$$

Επομένως, $F(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

Δ2.

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη με:

$F'(x)=\left(x^3-x^2-x+1\right)'$

$F'(x)=3x^2-2x-1$

(άλλωστε γνωρίζαμε εκ των προτέρων ότι η F είναι παράγουσα της f, άρα $F'(x)=f(x)$)

Έχουμε:

$F'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-1=0$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-1)=4+12=16>0$

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 3}=\frac{2\pm 4}{6}=\begin{cases}\dfrac{2-4}{6}=\dfrac{-2}{6}=-\dfrac{1}{3}\\[2mm] \dfrac{2+4}{6}=\dfrac{6}{6}=1\end{cases}$$

Ο πίνακας προσήμων της F' - μονοτονίας της F έχει ως εξής:

x	$-\infty$ $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ 1	1 $+\infty$
$F'(x)$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Άρα η F είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$,
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{1}{3},1\right]$ και
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Η F παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στο $x_1=-\frac{1}{3}$, το

$$F\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)+1=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1=\frac{-1-3+9+27}{27}=\frac{32}{27}$$

και

- τοπικό ελάχιστο στο $x_2=1$, το $F(1)=1^3-1^2-1+1=1-1-1+1=0$

Δ3.

Καταρχήν $2011, 2012\in[1,+\infty)$ (διάστημα στο οποίο η F είναι γνησίως αύξουσα), αφού $2011>1$ και $2012>1$.

Επομένως, $2011<2012 \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} F(2011)<F(2012)$ (δηλαδή η φορά της ανισότητας δεν αλλάζει)

Δηλαδή το $F(2011)$ είναι μικρότερο από το $F(2012)$

Δ4.

Η συνάρτηση $f(x)=3x^2-2x-1$ είναι ίση με την $F'(x)$, επομένως ο πίνακας προσήμων της έχει ως εξής:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		1		$+\infty$
$f(x)=F'(x)$		$+$		$-$		$-$		$+$	

Επομένως το εμβαδόν του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$E=\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 |F'(x)|dx=-\int_0^1 F'(x)dx=-\left[F(x)\right]_0^1=\left[-F(x)\right]_0^1=$$

$$=(-F(1))-(-F(0))=-F(1)+F(0)=F(0)-F(1)$$

Επειδή $F(0)=0^3-0^2-0+1=0-0-0+1=1$ και $F(1)=0$, θα έχουμε:

$E=F(0)-F(1)=1-0=1$ τετραγωνική μονάδα.