Θέμα Α

Α1. Θεωρία (απόδειξη), σελίδα 260 σχολικού βιβλίου (Θεώρημα Fermat)

Α2. Θεωρία (Ορισμός), σελίδα 280 σχολικού βιβλίου.

Α3.

α)	Σωστό
β)	Σωστό
γ)	Λάθος
δ)	Λάθος
ε)	Σωστό

Θέμα Β

Β1.

Παρατηρούμε ότι $|z-3i|=|\overline{z-3i}|=|\overline{z}+3i|$

Άρα. $|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-(0+3i)|=1$

Επομένως, οι εικόνες του μιγαδικού z κινούνται σε κύκλο με κέντρο $\mathrm{K}(0,3)$ και ακτίνα $\rho=1$

Β2.

Είναι:

$$|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z}+3i)=1 \overset{z\neq 3i}{\Leftrightarrow} \overline{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$$

Β3.

Έστω $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Επειδή $\overline{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$, Έχουμε:

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)=2\alpha\in\mathbb{R}$$

Άρα $w=\overline{w}=2\alpha+0\cdot i$.

Επειδή οι εικόνες του z κινούνται στον κύκλο $C:x^2+(y-3)^2=1$ θα ισχύει $\alpha^2+(\beta-3)^2=1\Leftrightarrow\alpha^2=1-(\beta-3)^2\le 1$

Δηλαδή, $\alpha^2\le1\Leftrightarrow|\alpha|^2\le1\Leftrightarrow|\alpha|\le1\Leftrightarrow-1\le\alpha\le1\Leftrightarrow-2\le2\alpha\le2\Leftrightarrow-2\le w\le2$.

Β4.

$$|z-w|=|z|\Leftrightarrow|z-w|^2=|z|^2\Leftrightarrow(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=z\cdot\overline{z}\Leftrightarrow z\cdot\overline{z}-z\cdot\overline{w}-\overline{z}\cdot w+w\cdot\overline{w}=z\cdot\overline{z}\Leftrightarrow$$

$$\overset{\overline{w}=w}{\Leftrightarrow} w\cdot w-z\cdot w-\overline{z}\cdot w=0\Leftrightarrow w^2-w\cdot(z+\overline{z})=0\Leftrightarrow w^2-w\cdot2\mathrm{Re}(z)=0\Leftrightarrow w^2-w\cdot w=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow w^2-w^2=0$ ισχύει.

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1.

$e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$e^xf'(x)+e^xf''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$(e^x-1)f'(x)+(e^x-x)f''(x)=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$\left((e^x-x)f'(x)\right)'=\left(e^x\right)'$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$(e^x-x)f'(x)=e^x+c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει $(e^0-0)f'(0)=e^0+c\overset{f'(0)=0}{\Leftrightarrow}c=-1$

Άρα $(e^x-x)f'(x)=e^x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (1)

Λόγω της γνωστής ανισότητας $\ell nx\le x-1$ για κάθε $x>0$ και θέτοντας όπου x το e^x προκύπτει $\ell ne^x\le e^x-1\Leftrightarrow e^x\ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επειδή $x+1>x$ θα ισχύει $e^x>x\Leftrightarrow e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα $e^x-x\ne0$ και διαιρώντας με e^x-x η σχέση (1) δίνει:

$f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=\left(\ell n\left(e^x-x\right)\right)'$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα υπάρχει σταθερά $c'\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$f(x)=\ell n\left(e^x-x\right)+c'$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει $f(0)=\ell n\left(e^0-0\right)+c' \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} c'=0$

Άρα $f(x)=\ell n\left(e^x-x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ2.

Είναι $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow e^x-1=0\Leftrightarrow x=0$.

$f'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow x>0$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, ενώ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=\ell n\left(e^0-0\right)=0$

Γ3.

$$f''(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\ldots=\frac{2e^x-xe^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}$$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^x-xe^x-1=0 \qquad (2)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2e^x-xe^x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Η εξίσωση (2) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $h(x)=0$.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x-xe^x=e^x(1-x)$.

$h'(x)=0\Leftrightarrow e^x(1-x)=0\Leftrightarrow x=1$ (επειδή $e^x\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

$h'(x)>0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<1$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	$\searrow$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\underset{\text{de l' Hospital}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$, έχουμε:

$\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x}-xe^{x}-1\right)=2\cdot 0-0-1=-1$

$h(1)=2e^{1}-1\cdot e^{1}-1=e-1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x}-xe^{x}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xe^{x}\left(2\dfrac{1}{x}-1-\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{e^{x}}\right)\right]\overset{(+\infty)\cdot(+\infty)\cdot(2\cdot0-1-0)}{=}-\infty$

- Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,1]$

  $h\nearrow\Delta_1$ και h συνεχής στο Δ_1. Άρα το σύνολο τιμών της είναι:

  $h(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),h(1)\right]=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),e-1\right]$

  Επειδή $0\in h(\Delta_1)$ και $h\nearrow\Delta_1$ η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_1\in\Delta_1$

- Στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$

  $h\searrow\Delta_2$ και h συνεχής στο Δ_2. Άρα το σύνολο τιμών της είναι:

  $h(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),\lim\limits_{x\to1}h(x)\right)\overset{h\text{ συνεχής στο }1}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}h(x),h(1)\right)=(-\infty,e-1)$

  Επειδή $0\in h(\Delta_2)$ και $h\searrow\Delta_2$ η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_2\in\Delta_2$

Επομένως, τόσο η εξίσωση $h(x)=0$, όσο και η ισοδύναμή της $f''(x)=0$ έχουν ακριβώς δυο ρίζες $x_1\in\Delta_1$ και $x_2\in\Delta_2$.

$$f''(x)>0\overset{\left(e^{x}-x\right)^{2}>0}{\Leftrightarrow}2e^{x}-xe^{x}-1>0 \qquad (3)$$

Επειδή $h(x)=2e^{x}-xe^{x}-1,\ x\in\mathbb{R}$, η ανίσωση (3) είναι ισοδύναμη με την ανίσωση $h(x)>0$.

- Στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, 1]$

Για $x < x_1 \overset{h \nearrow \Delta_1}{\Leftrightarrow} h(x) < h(x_1) \overset{x_1 \text{ ρίζα της } h}{\Leftrightarrow} h(x) < 0$

Για $x > x_1 \overset{h \nearrow \Delta_1}{\Leftrightarrow} h(x) > h(x_1) \overset{x_1 \text{ ρίζα της } h}{\Leftrightarrow} h(x) > 0$

- Στο διάστημα $\Delta_2 = (1, +\infty)$

Για $x < x_2 \overset{h \searrow \Delta_2}{\Leftrightarrow} h(x) > h(x_2) \overset{x_2 \text{ ρίζα της } h}{\Leftrightarrow} h(x) > 0$

Για $x > x_2 \overset{h \searrow \Delta_2}{\Leftrightarrow} h(x) < h(x_2) \overset{x_2 \text{ ρίζα της } h}{\Leftrightarrow} h(x) < 0$

Επομένως οι πίνακες προσήμων τόσο της $h(x)$ όσο και της $f''(x)$ έχουν ως εξής:

x	$-\infty$ x_1	x_1 x_2	x_2 $+\infty$
$h(x)$	$-$	$+$	$-$

Άρα:

x	$-\infty$ x_1	x_1 x_2	x_2 $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\frown$	$\smile$	$\frown$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στα x_1, x_2 (δηλαδή έχει εφαπτομένη στα σημεία αυτά), θα έχει ακριβώς δυο σημεία καμπής, τα $\mathrm{M}_1(x_1, f(x_1))$ και $\mathrm{M}_2(x_2, f(x_2))$.

Γ4.

Η εξίσωση γίνεται $\ell n(e^x - x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(x) - \sigma\upsilon\nu x = 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) - \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Είναι $\varphi(0) = f(0) - \sigma\upsilon\nu 0 = 0 - 1 = -1 < 0$ και

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Επειδή $\frac{\pi}{2} > 0 \overset{f \nearrow [0, +\infty)}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f(0) \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

Άρα και $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$

- Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά μεταξύ των συνεχών συναρτήσεων f και $\sigma\upsilon\nu x$
- $\varphi(0)\cdot\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για τη συνάρτηση φ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$. Άρα, η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με

$$\varphi'(x)=f'(x)+\eta\mu x\Leftrightarrow\varphi'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}+\eta\mu x$$

Επειδή για $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\eta\mu x>0$ και

για $x>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0\overset{e^x-x>0}{\Leftrightarrow}\frac{e^x-1}{e^x-x}>0$

Έχουμε ότι $\varphi'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Άρα $\varphi\nearrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και η εξίσωση $\varphi(x)=0$ θα έχει το πολύ μια ρίζα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Επειδή $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x)=0$, αυτή θα είναι και η μοναδική ρίζα.

Θέμα Δ

Για το ολοκλήρωμα-συνάρτηση $I(x)=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$ θέτουμε $x+t=u\Leftrightarrow t=u-x$

Τότε, $dt=dx$ και

- Για $t=0$, $u=x$
- Για $t=-x$, $u=0$

Επομένως:

$$I(x)=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt=\int_x^0\frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du=\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du=\int_x^0\frac{e^{2u}\cdot e^{-2x}}{g(u)}du=-e^{-2x}\cdot\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$$

Άρα, $I(x)=-\frac{1}{e^{2x}}\cdot\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$

Ομοίως (με την ίδια αντικατάσταση), προκύπτει:

$$J(x)=-\frac{1}{e^{2x}}\cdot\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du$$

Δ1.

Έχουμε:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\frac{1}{e^{2x}}\cdot\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow 1-f(x)=-\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\quad(1)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επειδή οι συναρτήσεις $g(u)$ και e^{2u} είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ θα είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως η $f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$ θα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)}\Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x)=e^{2x}\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.\quad(2)$$

Ακόμα, για $x=0$ η σχέση (1) δίνει $f(0)=1+\int_0^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du=1+0=0$. (3)

Ομοίως, προκύπτουν:

$$g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du\quad\text{για κάθε } x\in\mathbb{R}\quad(4)$$

$$g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}\Leftrightarrow f(x)\cdot g'(x)=e^{2x}\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}\quad(5)$$

$$g(0)=1\quad(6)$$

Λόγω των σχέσεων (2) και (5), προκύπτει:

$$f'(x)g(x)=f(x)g'(x)\underset{g(x)>0}{\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}}\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)}\Leftrightarrow(\ell nf(x))'=(\ell ng(x))' \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αρά, υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$\ell nf(x)=\ell ng(x)+c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει: $\ell nf(0)=\ell ng(0)+c\Leftrightarrow\ell n1=\ell n1+c\Leftrightarrow c=0$

Άρα, $\ell nf(x)=\ell ng(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Ισοδύναμα $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ2.

$$(2)\Leftrightarrow f'(x)\cdot g(x)=e^{2x}\overset{f(x)=g(x)}{\Leftrightarrow}f(x)\cdot f'(x)=e^{2x}\Leftrightarrow 2f(x)\cdot f'(x)=2e^{2x}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αρά, υπάρχει σταθερά $c'\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$f^2(x)=e^{2x}+c'$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Για $x=0$ η προηγούμενη σχέση δίνει: $f^2(0)=e^0+c'\Leftrightarrow c'=0$

Άρα, $f^2(x)=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και διατηρεί πρόσημο, αφού $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως:

$f(x)=\sqrt{e^{2x}}=e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ3.

$$L=\lim_{x\to0^-}\frac{\ell nf(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\ell ne^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$$

Θέτουμε όπου $\frac{1}{x}$ το $-u$. Τότε $\lim_{x\to0^-}u=\lim_{x\to0^-}\left(-\frac{1}{x}\right)=+\infty$

Άρα $L=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{u}}{e^{-u}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{-e^u}{u}\underset{\text{de l' Hospital}}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{-e^u}{1}=-\infty$

Δ4.

Η $f\left(t^2\right)=e^{t^2}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, επομένως η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f\left(t^2\right)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x)=f\left(x^2\right)=e^{x^2}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $F\nearrow\mathbb{R}$.

Ακόμα είναι $F(1)=\int_1^1 f\left(t^2\right)dt=0$. Άρα:

- Για $x<1\overset{F\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}F(x)<F(1)\Leftrightarrow F(x)<0$
- Για $x>1\overset{F\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}F(x)>F(1)\Leftrightarrow F(x)>0$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$	
$F(x)$	$-$	$+$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E=\int_0^1\left|F(x)\right|dx\overset{F(x)<0}{=}-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1(x)'F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$$

$$=-1\cdot F(1)+0\cdot F(0)+\int_0^1 xe^{x^2}dx\overset{F(1)=0}{=}\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\cdot\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(e^1-e^0\right)=\frac{e-1}{2}$$

τετραγωνικές μονάδες.