Θέμα Α

Α1. Θεωρία (απόδειξη), σελίδα 152 σχολικού βιβλίου

Α2. Θεωρία (Ορισμός), σελίδα 142 σχολικού βιβλίου

Α3. Θεωρία, σελίδα 65 σχολικού βιβλίου

Α4.

α)	Λάθος
β)	Λάθος
γ)	Σωστό
δ)	Λάθος
ε)	Σωστό

Θέμα Β

Β1. Το $\mathrm{N}(\Omega)$ και το $\mathrm{N}(\mathrm{M})$ είναι ακέραιοι αριθμοί, αφού εκφράζουν πλήθος.

Επομένως, επειδή $P(\mathrm{M})=\dfrac{\mathrm{N}(\mathrm{M})}{\mathrm{N}(\Omega)}\Leftrightarrow \dfrac{1}{4}=\dfrac{\mathrm{N}(\mathrm{M})}{\mathrm{N}(\Omega)}\Leftrightarrow \mathrm{N}(\mathrm{M})=\dfrac{\mathrm{N}(\Omega)}{4}$

Για να είναι το $\mathrm{N}(\mathrm{M})$ ακέραιος, θα πρέπει το $\mathrm{N}(\Omega)$ να διαιρείται με το 4.

Άρα, θα πρέπει το $\mathrm{N}(\Omega)$ να είναι πολλαπλάσιο του 4.

Επειδή $64<\mathrm{N}(\Omega)<72$, θα πρέπει $\mathrm{N}(\Omega)=68$ γιατί είναι το μοναδικό πολλαπλάσιο του 4 ανάμεσα στους αριθμούς 64 και 72.

Β2. Τα ενδεχόμενα Α, Μ και Ω είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο και $\mathrm{A}\cup\mathrm{K}\cup\mathrm{M}=\Omega$

Άρα $P(\mathrm{A})+P(\mathrm{K})+P(\mathrm{M})=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{4}=1\Leftrightarrow \ldots\Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=\dfrac{1}{4}$

Για $\lambda=1$, είναι $P(\mathrm{A})=4\cdot 1^2=4>1$ άτοπο.

Άρα $\lambda=\dfrac{1}{4}$

Για $\lambda = \frac{1}{4}$:

$$P(\mathrm{M}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\mathrm{A}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$P(\mathrm{K}) = -5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Β3. $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(\mathrm{A})}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\mathrm{A}) = \frac{N(\Omega)}{4} \Leftrightarrow N(\mathrm{A}) = 17$ άσπρες μπάλες

$P(\mathrm{M}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(\mathrm{M})}{N(\Omega)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow N(\mathrm{M}) = \frac{N(\Omega)}{4} \Leftrightarrow N(\mathrm{M}) = 17$ μαύρες μπάλες

$P(\mathrm{K}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{N(\mathrm{K})}{N(\Omega)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow N(\mathrm{K}) = \frac{N(\Omega)}{2} \Leftrightarrow N(\mathrm{K}) = 34$ κόκκινες μπάλες

Β4. Το ενδεχόμενο να επιλεγεί άσπρη ή μαύρη μπάλα είναι το $\mathrm{A} \cup \mathrm{M}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα Α και Μ είναι ξένα, ισχύει:

$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{M}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{M}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (απλός προσθετικός νόμος)

<u>Θέμα Γ</u>

Είναι: $x_1 = 10$, $x_2 = 12$, $x_3 = 14$, $x_4 = 16$ και $x_5 = 18$ με αντίστοιχες συχνότητες $f_i\%$
$f_1\% = 10$, $f_2\% = 20$, $f_3\% = y_\Delta$, $f_4\% = y_\mathrm{E}$ και $f_5\% = 10$

Γ1. Επειδή $\Delta\mathrm{E} // x'x$ θα πρέπει $y_\Delta = y_\mathrm{E}$.

Έστω $y_\Delta = y_\mathrm{E} = \alpha$.

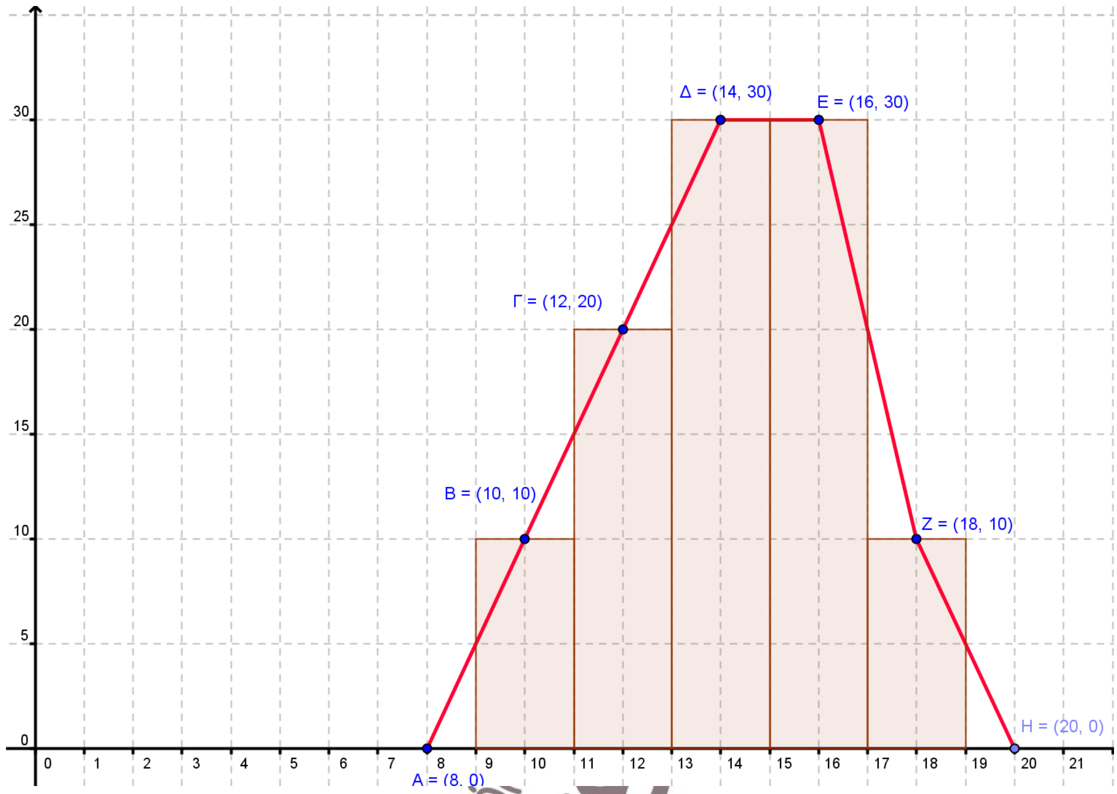
Τότε, επειδή $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% + f_5\% = 100$

$$10 + 20 + \alpha + \alpha + 10 = 100$$

$$\alpha = 30$$

Άρα $y_\Delta = y_\mathrm{E} = 30$

Γ2.



Γ3.

Πωλήσεις …−…	Κεντρική τιμή x_i	Σχετική συχνότητα f_i	Σχετική συχνότητα τοις εκατό $f_i\%$
9-11	10	0,1	10
11-13	12	0,2	20
13-15	14	0,3	30
15-17	16	0,3	30
17-19	18	0,1	10
Σύνολο		1	100

Γ4.

Οι πωλητές που έχουν κάνει πωλήσεις πάνω από 15 χιλιάδες € είναι εκείνοι που αναφέρονται στις δυο τελευταίες κλάσεις και είναι σε ποσοστό

$$f_4\% + f_5\% = 30 + 10 = 40\%$$

Γ5.

Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων ν_i και τον οριζόντιο άξονα ισούται με το μέγεθος του δείγματος ν. Άρα $\nu = 80$ πωλητές.

Τότε το ζητούμενο πλήθος είναι $40\% \cdot \nu = 0,4 \cdot \nu = 0,4 \cdot 80 = 32$ πωλητές.

Θέμα Δ

Δ1. Είναι $f(x) = e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} \Leftrightarrow f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}$

Η συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} \cdot \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x\right)'$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} \cdot \left(x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15}\right) = 0 \Leftrightarrow$$ (επειδή $e^{\frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x} > 0$)

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{15}x + \frac{2}{15} = 0 \Leftrightarrow 15x^2 - 11x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \begin{cases} \frac{12}{30} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \\ \frac{10}{30} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$ $\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗

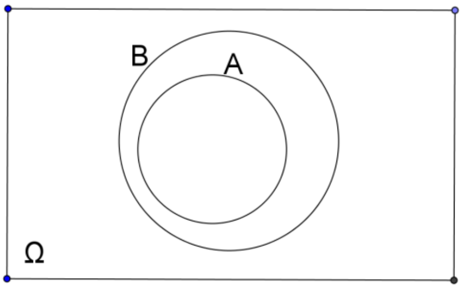
Δ2.

$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, άρα $P(\mathrm{A}) \leq P(\mathrm{B})$.

Επομένως $P(\mathrm{A}) = \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ και $P(\mathrm{B}) = \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

Ακόμα, επειδή $A \subseteq B$ θα είναι:

$A \cup B = B$
$A \cap B = A$
$A - B = \varnothing$



Άρα:

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$P(A - B) = P(\varnothing) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(B) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$

Δ3.

α)

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{30}x^2 + \frac{2}{15}x = \frac{3}{10}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{15}x \Leftrightarrow 10x^3 - 11x^2 + 4x = 9x^3 - 6x^2 - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x \cdot \left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ή} \quad x = 2 \quad \text{ή} \quad x = 3$$

β)

$$v_1 = 2x_1 + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$v_2 = 2x_2 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$v_3 = 2x_3 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

Άρα $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} x_i v_i}{v_1 + v_2 + v_3} = \dfrac{0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{1 + 5 + 7} = \dfrac{31}{13}$