ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – 2008
(Θέματα και Λύσεις)

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ell n|x|, x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει :

$$\left(\ell n|x|\right)'=\frac{1}{x}$$

Μονάδες 10

Λύση :

Απόδειξη στη σελίδα 235 του σχολικού βιβλίου :

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Αν $x>0$, τότε $\left(\ell n|x|\right)'=\left(\ell nx\right)'=\frac{1}{x}$
- Αν $x<0$, τότε $\ell n|x|=\ell n(-x)$, οπότε αν θέσουμε $y=\ell n(-x)$ και $u=-x$ έχουμε $y=\ell nu$. Επομένως, $\left(\ell n|x|\right)'=\left[\ell n(-x)\right]'=y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$

  Άρα, σε κάθε περίπτωση ισχύει : $\left(\ell n|x|\right)'=\frac{1}{x}$.

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 5

Λύση :

Ορισμός στη σελίδα 191 του σχολικού βιβλίου :
Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον ισχύει :

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x)=f(\beta).$$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει : $f^{-1}(f(x))=x, x\in\mathrm{A}$ και $f\left(f^{-1}(y)\right)=y, y\in f(\mathrm{A})$

Μονάδες 2

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 2

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει :

$$f''(x)>0 \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } x.$$

Μονάδες 2

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx+\int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

Μονάδες 2

<u>Λύση</u> :

α. **Σωστό.**

β. **Σωστό.**

γ. **Λάθος.**
Όταν η διακρίνουσα είναι αρνητική, η εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις.

δ. **Λάθος.**
Μπορεί σε πεπερασμένα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της να ισχύει $f''(x_0)=0$.
Αντιπαράδειγμα : $f(x)=x^4$, με $f'(x)=4x^3$ και $f''(x)=12x^2$.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$
$f(x)$		

Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, ενώ παρατηρούμε ότι ισχύει $f''(0)=0$.

ε. **Σωστό.**

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν :

$$\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \quad \text{και} \quad \left|w-(1-i)\right|=\left|w-(3-3i)\right|$$

τότε να βρείτε :

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

Μονάδες 6

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

Μονάδες 7

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

Μονάδες 6

<u>Λύση</u> :

α. $$\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)\cdot z\right|=6\Leftrightarrow\left|i+2\sqrt{2}\right|\cdot|z|=6\Leftrightarrow\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+1^2}\cdot|z|=6\Leftrightarrow 3\cdot|z|=6\Leftrightarrow\boxed{|z|=2}$$

<u>α’ τρόπος</u> :
Είναι $|z|=2$, δηλαδή η απόσταση της εικόνας του μιγαδικού z από την αρχή των αξόνων είναι σταθερή και ίση με 2.
Άρα η εικόνα του μιγαδικού z κινείται σε κύκλο κέντρου $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$.

` <u>β’ τρόπος</u> :
Έστω $z=x+yi$.

$$|z|=2\Leftrightarrow\sqrt{x^2+y^2}=2\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=2^2\Leftrightarrow x^2+y^2=4.$$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στον κύκλο $C:x^2+y^2=4$ που έχει κέντρο $\mathrm{O}(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

β. <u>α’ τρόπος</u> :
Είναι $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$, δηλαδή η απόσταση της εικόνας του μιγαδικού w από την εικόνα του μιγαδικού $z_1=1-i$ είναι ίση με την απόσταση της εικόνας του μιγαδικού w από την εικόνα του μιγαδικού $z_2=3-3i$.
Άρα η εικόνα του μιγαδικού w κινείται στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB, όπου $\mathrm{A}(1,-1)$ και $\mathrm{B}(3,-3)$.

<u>β’ τρόπος</u> :
Έστω $w=x+yi$.

$$|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|\Leftrightarrow|x+yi-1+i|=|x+yi-3+3i|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}\right)^2=\left(\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+2y+1=\cancel{x^2}-6y+9+\cancel{y^2}-6y+9\Leftrightarrow$$

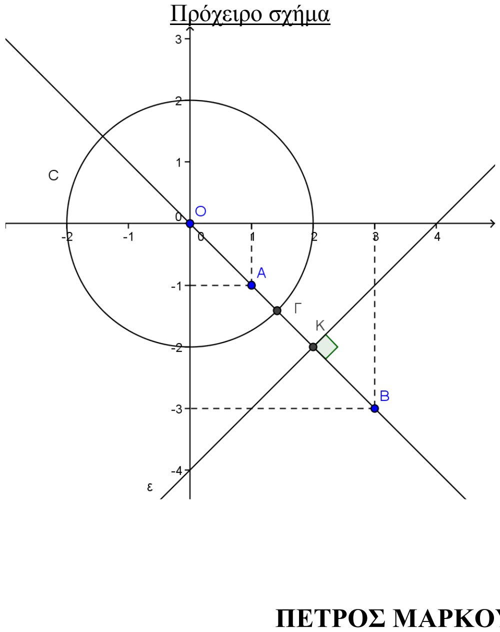
$$\Leftrightarrow 4x-4y-16=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-y-4=0$$

Άρα, η εικόνα του μιγαδικού w κινείται στην ευθεία $\varepsilon:y=x-4$ (ή $\varepsilon:x-y-4=0$)

γ.

<u>Πρόχειρο σχήμα</u>



Το μέτρο $|w|$ του μιγαδικού w εκφράζει γεωμετρικά την απόσταση της εικόνας του από την αρχή των αξόνων.
Φέρουμε $\mathrm{OK}\perp\varepsilon$.
Επειδή οι εικόνες του μιγαδικού w κινούνται στην ευθεία ε, το $|w|_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$ θα είναι ίσο με την απόσταση $\mathrm{OK}=d(\mathrm{O},\varepsilon)$.

Άρα, $|w|_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}=\dfrac{|x_0-y_0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

Αν θέλαμε να βρούμε ποιος από τους μιγαδικούς w είναι αυτός με το ελάχιστο μέτρο, δεν είχαμε παρά να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου K, που είναι και η εικόνα αυτού του μιγαδικού.
Είναι : $\mathrm{OK} \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{OK}} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\mathrm{OK}} = -1$. Άρα, $\underline{\mathrm{OK} : y = -x}$.
Το K είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και OK, άρα οι συντεταγμένες του θα είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των συγκεκριμένων καμπύλων.
Είναι : $\begin{cases} y = -x \\ y = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \end{cases}$. Άρα $\mathrm{K}(2, -2)$ και ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $w_0 = 2 - 2i$, με $|w|_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = |w_0| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

δ. Το $|z - w|$ εκφράζει γεωμετρικά την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w. Επειδή η εικόνα του μιγαδικού z κινείται στον κύκλο C και η εικόνα του μιγαδικού w κινείται στην ευθεία ε, το $|z - w|_{\varepsilon\lambda\alpha\chi}$ θα είναι ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $\Gamma\mathrm{K}$.
Δηλαδή, $|z - w|_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} = (\Gamma\mathrm{K}) = (\mathrm{OK}) - (\mathrm{O}\Gamma) = |w|_{\varepsilon\lambda\alpha\chi} - \rho = 2\sqrt{2} - 2$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ell nx, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

Λύση :

α. Είναι : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x \ell nx) \overset{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ell nx}{\frac{1}{x}} \underset{de\, l'Hospital}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{(\ell nx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}} = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$,

και $f(0) = 0$.
Δηλαδή ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ και επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως αλγεβρικό γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων x και ℓnx, με $f'(x) = (x)'\ell nx + x \cdot (\ell nx)' = \ell nx + 1$.
(η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 γιατί $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cancel{x} \cdot \ell nx}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \ell nx = -\infty \notin \mathbb{R}$)

Ακόμα, είναι : $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ell nx+1=0 \Leftrightarrow \ell nx=-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ell nx=-\ell ne \Leftrightarrow \ell nx=\ell ne^{-1} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{1}{e}}$$

Είναι : $0<\frac{1}{e^2}<\frac{1}{e}$ και $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}\cdot \ell n\frac{1}{e^2}=-\frac{2}{e^2}<0$, άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$.

Είναι : $\frac{1}{e}<e$ και $f(e)=e\cdot \ell ne=e>0$, άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

x	$-\infty$ $\quad$ 0		$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$
$f(x)$		$\searrow$	ολικό ελάχιστο $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

Η συνάρτηση f είναι :

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=\left[0,\frac{1}{e}\right]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
- παρουσιάζει το (ολικό) ελάχιστο $f\left(\frac{1}{e}\right)$ στο σημείο $x_0=\frac{1}{e}$ του πεδίου ορισμού της.

Δηλαδή, ισχύει : $f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ell n\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$

Άρα, $f(x)\geq -\frac{1}{e}$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=\frac{1}{e}$.

- Στο διάστημα $\Delta_1=\left[0,\frac{1}{e}\right]$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } f \text{ είναι γνησίως φθίνουσα}\\ f(0)=0\\ f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}\end{array}\right\}\Rightarrow f(\Delta_1)=\left[-\frac{1}{e},0\right]$$

- Στο διάστημα $\Delta_2=\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα}\\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{e}} f(x)=f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\ell nx=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow f(\Delta_2)=\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$$

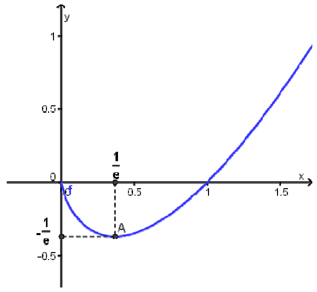
Άρα, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\mathrm{A})=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left[\frac{1}{e}+\infty\right]$.

γ. Η εξίσωση $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$, $x > 0$ γράφεται ισοδύναμα :

$$x = e^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ell nx = \ell ne^{\frac{\alpha}{x}} \Leftrightarrow \ell nx = \frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow x \cdot \ell nx = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha,\ x > 0.$$

Γραφικά, η λύση της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για $x > 0$, δίνει τις τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon : y = \alpha$ η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Επειδή $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, η συνάρτηση f είναι κυρτή και μια πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$, $x > 0$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα

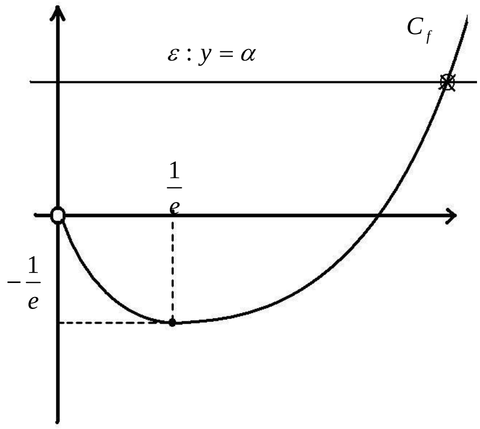


Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- Για $\alpha > 0$:

Τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μια λύση, επειδή :

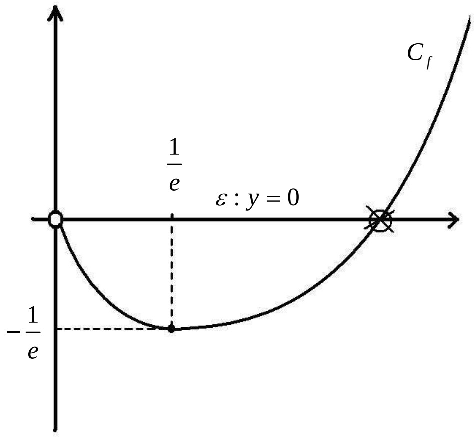
- στο $A_1 = \left(0, \frac{1}{e}\right]$, είναι $f(A_1) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right)$ και $\alpha \notin f(A_1)$, άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο A_1
- στο $\Delta_2 = \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, είναι $f(\Delta_2) = \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και $\alpha \in f(\Delta_2)$. Άρα, η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο Δ_2, και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική



- Για $\alpha = 0$:

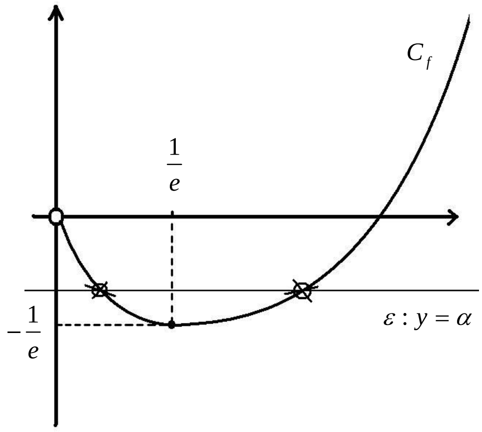
Τότε η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει ακριβώς μια λύση, επειδή :

- στο $A_1 = \left(0, \frac{1}{e}\right]$, είναι $f(A_1) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right)$ και $0 \notin f(A_1)$, άρα η εξίσωση δεν έχει ρίζα στο A_1
- στο $\Delta_2 = \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$, είναι $f(\Delta_2) = \left(-\frac{1}{e}, +\infty\right)$ και $0 \in f(\Delta_2)$. Άρα, η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο Δ_2, και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική. (συγκεκριμένα η ρίζα είναι το 1 αφού $f(1) = 0$)



- Για $\alpha \in \left(-\frac{1}{e},0\right)$:

Τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει <u>ακριβώς δύο</u> λύσεις, επειδή :



- στο $\mathrm{A}_1=\left(0,\frac{1}{e}\right]$, είναι $f(\mathrm{A}_1)=\left[-\frac{1}{e},0\right)$ και $\alpha \in f(\mathrm{A}_1)$.

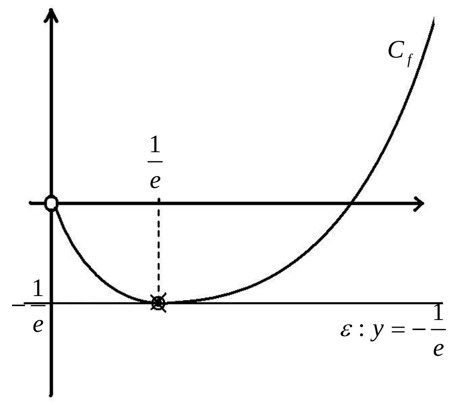
  Άρα η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο A_1, και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική.

- στο $\Delta_2=\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, είναι $f(\Delta_2)=\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$ και $\alpha \in f(\Delta_2)$.

  Άρα, η εξίσωση έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο Δ_2, και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 αυτή η ρίζα θα είναι μοναδική.

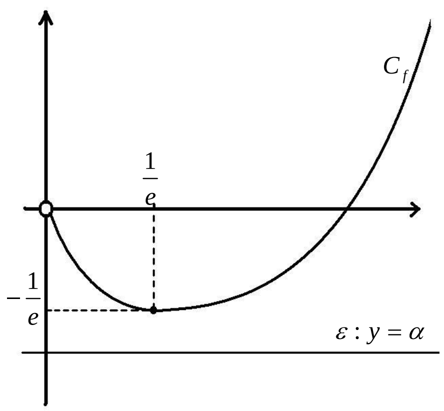
- Για $\alpha=-\frac{1}{e}$:

Τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει <u>ακριβώς μια</u> λύση, τη θέση του ελάχιστου $x=\frac{1}{e}$.



- Για $\alpha<-\frac{1}{e}$:

Τότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ <u>δεν έχει καμία</u> λύση, επειδή $\alpha \notin f(\mathrm{A})=\left[\frac{1}{e}+\infty\right]$.



δ. Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του διαφορικού λογισμού στο διάστημα $[x, x+1]$, όπου $x > 0$.

Η συνάρτηση f για $x > 0$ είναι :

- συνεχής στο διάστημα $[x, x+1] \subseteq (0, +\infty)$
- παραγωγίσιμη στο διάστημα $(x, x+1) \subseteq (0, +\infty)$

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}} \Leftrightarrow f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$.

Όμως, είναι $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ για $x > 0$, άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και κατ' επέκταση και στο διάστημα $(x, x+1) \subseteq (0, +\infty)$.

Άρα, για $\xi \in (x, x+1)$, δηλαδή για $x + 1 > \xi$ ισχύει :

$$f'(x+1) > f'(\xi) \Leftrightarrow f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \cdot \int_0^2 f(t)\,dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

$$g''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος **(α)** και τη συνάρτηση g του ερωτήματος **(β)** ισχύει ότι $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε :

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι $1-1$.

Μονάδες 3

Λύση :

α. Το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(t)\,dt$ είναι αριθμός και θέτουμε $\lambda = \int_0^2 f(t)\,dt$, οπότε προκύπτει $f(x) = (10x^3 + 3x) \cdot \lambda - 45$ ή $f(x) = 10\lambda x^3 + 3\lambda x - 45$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda = 2$.

Είναι : $f(x) = 10\lambda x^3 + 3\lambda x - 45 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (10\lambda x^3 + 3\lambda x - 45)\,dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\,dx = 10\lambda \int_0^2 x^3 dx + 3\lambda \int_0^2 x dx - 45 \int_0^2 dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 10\lambda\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 + 3\lambda\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - 45[x]_0^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 10\lambda\left(\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right) + 3\lambda\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 45(2-0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 40\lambda + 6\lambda - 90 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 45\lambda = 90 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2$$

β. α’ τρόπος :

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι :

$$g''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x) - g'(x_0)}{x - x_0}$$

Θέτουμε όπου $x_0 - x$, το h και προκύπτει : $x - x_0 = -h$ και $x = x_0 - h$.

Τότε, όταν $x \to x_0$ είναι $h \to 0$.

Άρα, $g''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x) - g'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x_0 - h) - g'(x_0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x_0) - g'(x_0 - h)}{h}$.

Δηλαδή, ισχύει $g''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x_0) - g'(x_0 - h)}{h}$ για ένα τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Άρα, ισχύει $g''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x - h)}{h}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β’ τρόπος :

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, για τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$ είναι :

$$g''(x_0) = \lim_{u \to 0} \frac{g'(x_0 + u) - g'(x_0)}{u}$$

Θέτουμε όπου $-u$ το h και προκύπτει $u = -h$.

Τότε, όταν $u \to 0$ είναι $h \to 0$.

Άρα, $g''(x_0) = \lim_{u \to 0} \frac{g'(x_0 + u) - g'(x_0)}{u} = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x_0 - h) - g'(x_0)}{-h} = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x_0) - g'(x_0 - h)}{h}$.

Δηλαδή, ισχύει $g''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x_0) - g'(x_0 - h)}{h}$ για ένα τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Άρα, ισχύει $g''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x - h)}{h}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ.

i. $$\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{de\, l'Hospital}{=}}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{g'(x+h)\cdot(x+h)' - (2g(x))' + g'(x-h)\cdot(x-h)'}{(h^2)'} =$$

(Προσέχουμε ότι η μεταβλητή παραγώγισης είναι η h, άρα το $g(x)$ θεωρείται σταθερός αριθμός)

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)\cdot 1-0+g'(x-h)\cdot(-1)}{2h}=$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}=$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{h}=$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right]=$$

$$= \frac{1}{2}\left[g''(x)+g''(x)\right]=$$

$$= g''(x)$$

Άρα, η σχέση $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$, δίνει :

$g''(x)=f(x)+45$

$g''(x)=20x^3+6x-\cancel{45}+\cancel{45}$

$g''(x)=20x^3+6x$

$g'(x)=5x^4+3x^2+c_1$

Όμως, $g'(0)=1\Leftrightarrow c_1=1$. Άρα :

$g'(x)=5x^4+3x^2+1$

$g(x)=x^5+x^3+x+c_2$

Όμως, $g(0)=1\Leftrightarrow c_2=1$. Άρα :

$g(x)=x^5+x^3+x+1$

ii. Είναι $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Δηλαδή η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
Άρα η συνάρτηση g είναι $1-1$.

Σημείωση :
Οι επεξηγήσεις σε κάποια σημεία δεν είναι απαραίτητες.
Σκοπός είναι η καλύτερη κατανόηση.
Για παράδειγμα στις ερωτήσεις τύπου Σωστό/Λάθος δεν απαιτείται εξήγηση, παρά μόνο η ένδειξη Σωστό ή Λάθος.