ΟΕΦΕ – 2002

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 5

Β. Έστω οι αριθμοί $\alpha,\beta,\lambda \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ και η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις :

i) Αν για την f ισχύει το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε η γραφική παράσταση της f έχει σ' ένα τουλάχιστον σημείο της οριζόντια εφαπτομένη.

ii) Υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ με $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

iii) Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε η f δεν έχει ρίζα στο (α,β).

iv) Ισχύει $\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right)' = f'(x)$.

v) $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \cdot \int f(x)\,dx$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Γ. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1, z_2 \neq 0$ και έστω A,B οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο. Να αποδείξετε ότι :

α. Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ παριστάνει τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Μονάδες 2

β. Αν $z_2 = i \cdot z_1$ το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (O είναι η αρχή των αξόνων)

Μονάδες 3

Δ. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^{ο}

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{και} \quad f'(x) = \frac{2}{1+e^{f(x)}} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με } f'(0) = 1.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f :

α. είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 3

β. στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

γ. έχει μοναδική ρίζα την $x = 0$.

Μονάδες 2

Β. Να αποδείξετε ότι :

α. ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=2x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

β. η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

Μονάδες 2

γ. οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινή εφαπτομένη στην αρχή των αξόνων.

Μονάδες 4

Γ.

α. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3^ο^

Δίνεται ο μιγαδικός $z\neq -2i$ και θεωρούμε τον $f(z)=\dfrac{2z}{z+2i}$. Έστω ρ το μέτρο και θ ένα όρισμα του μιγαδικού $z+2i$.

α. Βρείτε τις συντεταγμένες της εικόνας Α του μιγαδικού z_0 στο μιγαδικό επίπεδο, για τον οποίο ισχύει $f(z_0)=3+i$.

Μονάδες 3

β. Να βρείτε συναρτήσει των ρ και θ, το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού $f(z)-2$.

Μονάδες 5

γ. Αν $|f(z)-2|=\sqrt{2}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα Μ του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

Μονάδες 7

δ. Αν $Arg\left(f(z)-2\right)=\dfrac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα Μ του μιγαδικού z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε μια ημιευθεία ε.

Μονάδες 8

ε. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ ανήκει στον κύκλο C και στην ημιευθεία ε.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ και έστω οι συναρτήσεις F,G με $F(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x} f(t)\,dt$, $G(x)=\int_{\frac{1}{e}}^{x}\dfrac{f(t)}{t^2}\,dt$, $x>0$.

Να αποδείξετε ότι :

Α.

α) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Μονάδες 2

β) $-\dfrac{1}{8}\le f'(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Β. Για τους πραγματικούς αριθμούς α,β με $0<\alpha<\beta$ ισχύει :

$$f\left(\frac{1}{\beta}\right)-f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\le \beta-\alpha .$$

Μονάδες 4

Γ. Ο τύπος της συνάρτησης g με $g(x)=F(x)+G(x)$, $x>0$ είναι $g(x)=\ln x+1$, $x>0$.

Μονάδες 4

Δ. Αν η συνάρτηση h είναι συνεχής στα σημεία $0,\dfrac{\pi}{2}$ και $h(x)=F(\varepsilon\phi x)+G(\sigma\phi x)$ με $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, τότε είναι σταθερή στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ και να βρεθεί η τιμή της.

Μονάδες 5

Ε. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f'(x),h(x)$ και την ευθεία $x=1$ είναι ίσο με $\dfrac{1}{2}$.

Μονάδες 4