<u>ΟΕΦΕ – 2001</u>

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
α) Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 9

β) Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της f ;

Μονάδες 3,5

Β. **α)** Για τη συνάρτηση f ισχύουν : $f''(x)-f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)$. Να αποδείξετε ότι :

i) Η συνάρτηση $g(x)=\left[f(x)\right]^2-\left[f'(x)\right]^2+2001$ είναι σταθερή.

Μονάδες 3

ii) $g(x)=2001$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

β) *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

i. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σ' αυτό, τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$.

Μονάδες 2

ii. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε τα σημεία $\mathrm{A}(1,2)$ και $\mathrm{B}(2,-4)$ ανήκουν και τα δυο στη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 2,5

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Delta$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός z και έστω $f(z)=\dfrac{2+i\cdot\bar{z}}{1-\bar{z}}$, $z\neq 1$.

α. Να βρείτε το μέτρο, και ένα όρισμα του μιγαδικού $f(2)$.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $w=\left[f(2)\right]^{2004}$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι : $\left|\dfrac{f(z)-2}{f(z)+i}\right|=|z|$.

Μονάδες 8

δ. Αν $|z|=1$ και Μ είναι η εικόνα του $f(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο, να αποδείξετε ότι το Μ ανήκει σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{(\alpha-1)x+6}{x+\beta},\ \text{με}\ x\in(-1,+\infty),\ \text{όπου}\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},$$

η οποία έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y=2$ και $x=-1$.

α. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι

$$f(x)=\frac{2x+6}{x+1},\ x>-1.$$

Μονάδες 9

β. Να βρείτε συνάρτηση $G(x)$ τέτοια, ώστε $G'(x)=f(x)$ για κάθε $x>-1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $\mathrm{M}(0,2)$.

Μονάδες 9

γ. Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{G(x)}{x+1},\ x>-1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f,g τέτοιες, ώστε :

$$\int_1^x f(t)\,dt+\int_x^1 g(t)\,dt=x^2-2x+1,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R},$$

και έστω C_f,C_g οι γραφικές τους παραστάσεις.

Αν η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δυο λύσεις ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<1<\rho_2$, τότε :

α. Να αποδείξετε ότι :

i. Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα (ρ_1,ρ_2).

Μονάδες 4

ii. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=-2$.

Μονάδες 5

β. Αν η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

ii. Η f έχει ένα μόνο ελάχιστο στο $\mathbb{R}$, το οποίο παρουσιάζεται στο σημείο $x_0=\xi$ του ερωτήματος **α) ii**).

Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_f,C_g και τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 7