

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Μ. Τετάρτη 27 Απριλίου 2016  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Βλέπε απόδειξη θεωρήματος σχολικού βιβλίου σελίδα 263.
- A2.** Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελίδα 280.
- A3.** Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελίδα 303.
- A4.**  $\alpha \rightarrow \Lambda$ . Το σωστό είναι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$ . Βλέπε σελίδα 171 σχολικού βιβλίου.
- $\beta \rightarrow \Sigma$ . Βλέπε σελίδα 217 σχολικού βιβλίου.
- $\gamma \rightarrow \Sigma$ . Βλέπε σελίδα 330 σχολικού βιβλίου.
- $\delta \rightarrow \Sigma$ . Βλέπε σελίδα 192 σχολικού βιβλίου.
- $\epsilon \rightarrow \Lambda$ . Το σωστό είναι: τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος  $\Delta$  στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$ . Βλέπε σελίδα 261 σχολικού βιβλίου.

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Για να δείξουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , καθώς η  $f$  για κάθε  $x \neq 1$  είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Αρκεί να δείξουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ .

**1<sup>ος</sup> τρόπος**

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 = f(1).$$

Θέτοντας  $u = x - 1$  ισχύει αν  $x \rightarrow 1$  τότε  $u \rightarrow 0$  και έτσι το όριο γίνεται:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1 \text{ το οποίο είναι η παράγωγος της συνάρτησης } h(x) = e^x, \text{ για } x = 0.$$

$$\text{Άρα } h'(x) = e^x, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow u} \frac{e^u - 1}{u} = h'(0) = 1.$$

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} \stackrel{0/0 \text{ DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} - 1)'}{(x - 1)'}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} - 1)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{x-1} \cdot (x - 1)' = \lim_{x \rightarrow 1} e^{x-1} = e^0 = 1 = f(1).$$

**B2.** Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  και είναι πραγματικός αριθμός.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} - 1}{x - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1 - x + 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{(x - 1)^2} \stackrel{0/0 \text{ DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} - x)'}{((x - 1)^2)'}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{x-1} - x)'}{((x - 1)^2)' } = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{2(x - 1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} f(1) = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

Άρα η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$ , με  $f'(1) = \frac{1}{2}$ .

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$  είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1), \text{ δηλαδή } y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \text{ οπότε } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

**B3.** Η συνάρτηση  $g(x) = (x - 2)e^{x-1} + 1$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  ως πράξεις συνεχών στο  $\mathbb{R}$ , παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο  $\mathbb{R}$ , με  $g'(x) = e^{x-1} + (x - 2) \cdot e^{x-1} = e^{x-1}(1 + x - 2) = e^{x-1} \cdot (x - 1)$ .

Έχουμε:  $g'(x) \geq 0$ , οπότε ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$e^{x-1}(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Ομοίως αν  $g'(x) < 0$  προκύπτει  $x < 1$ .

Η μονοτονία και τα ακρότατα της  $g$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	↘		↗

min

Επειδή η  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για  $x = 1$  το  $g(1) = (1 - 2) \cdot e^{1-1} + 1 = -1 + 1 = 0$ , ισχύει  $g(x) \geq g(1)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Δηλαδή ισχύει  $g(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{x-1}(x-1) - (e^{x-1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{xe^{x-1} - e^{x-1} - e^{x-1} + 1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{xe^{x-1} - 2e^{x-1} + 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-2)e^{x-1} + 1}{(x-1)^2} = \frac{g(x)}{(x-1)^2} > 0 \text{ για κάθε } x \neq 1. \end{aligned}$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$  έπεται ότι είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**B4.** Ισχύει ότι:

- Η  $g$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[2015, 2016]$  ως παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .
- $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in [2015, 2016]$ , καθώς η συνάρτηση  $g$  μηδενίζεται μόνο στο  $x = 1$ .

Οπότε από γνωστό Θεώρημα έχουμε:  $\int_{2015}^{2016} g(x) dx > 0$ .

### **ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:

$$f(x) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} \Leftrightarrow f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \geq 0. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ , με  $x \in \mathbb{R}$ .

Παρατηρούμε ότι:

$$g(0) = f(0) - \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:

$$(1) \Leftrightarrow g(x) \geq g(0).$$

Δηλαδή η  $g$  παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο.

Επίσης το 0 είναι εσωτερικό σημείο του  $\mathbb{R}$  και η  $g$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$g'(x) = \left( f(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \right)' = f'(x) + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι:

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Leftrightarrow f'(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Γ2. 1<sup>ος</sup> τρόπος

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:

$$f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + f'(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot f''(x) + f'(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) \cdot f'(x))' + f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x (f(x) \cdot f'(x))' + e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x (f(x) \cdot f'(x))' + (e^x)' \cdot f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x \cdot f(x) \cdot f'(x))' = 0$$

2<sup>ος</sup> τρόπος

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:

$$f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + (f'(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot f''(x) + f'(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) \cdot f''(x) + e^x \cdot f'(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x)' \cdot f(x) \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) \cdot (f'(x))' + e^x \cdot f'(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(e^x \cdot f(x) \cdot f'(x))' = 0$$

Με εφαρμογή των Συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά  $c_1 \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε να ισχύει:

$$e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) = c_1.$$

Για  $x = 0$ , έχουμε:

$$e^0 \cdot f(0) \cdot f'(0) = c_1 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1.$$

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

$$e^x \cdot f(x) \cdot f'(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) \cdot f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot f(x) \cdot f'(x) = -2e^{-x} \Leftrightarrow (f^2(x))' = (2e^{-x})'$$

Με εφαρμογή των Συνεπειών του Θεωρήματος Μέσης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει σταθερά  $c_2 \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f^2(x) = 2e^{-x} + c_2.$$

Για  $x = 0$ , έχουμε:

$$f^2(0) = 2e^0 + c_2 \Leftrightarrow 3 = 2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1.$$

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι:

$$f^2(x) = 2e^{-x} + 1 \neq 0.$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , επομένως η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ .

Επειδή  $f(0) = \sqrt{3} > 0$ , θα είναι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Επομένως:

$$f(x) = \sqrt{2e^{-x} + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Γ3. 1<sup>ος</sup> τρόπος**

Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{2e^{-x_1} + 1} = \sqrt{2e^{-x_2} + 1} \Leftrightarrow$$

$$2e^{-x_1} + 1 = 2e^{-x_2} + 1 \Leftrightarrow 2e^{-x_1} = 2e^{-x_2} \Leftrightarrow$$

$$e^{-x_1} = e^{-x_2} \Leftrightarrow -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 συνάρτηση, οπότε αντιστρέφεται.

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με:

$$f'(x) = \left( \sqrt{2e^{-x} + 1} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{2e^{-x} + 1}} (2e^{-x} + 1)' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{2e^{-x} + 1}} < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε και 1-1 συνάρτηση, συνεπώς αντιστρέφεται.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016  
Β' ΦΑΣΗ

E\_3.Μλ3ΘΟ(α)

Θέτουμε  $y = f(x)$  και έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{2e^{-x} + 1} \quad (1)$$

Θα πρέπει  $y \geq 0$ . Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$y^2 = 2e^{-x} + 1 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{y^2 - 1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Θα πρέπει } \frac{y^2 - 1}{2} > 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 > 0 \stackrel{y > 0}{\Leftrightarrow} y > 1.$$

Με αυτόν τον επιπλέον περιορισμό έχουμε:

$$\ln e^{-x} = \ln \left( \frac{y^2 - 1}{2} \right) \Leftrightarrow -x = \ln \left( \frac{y^2 - 1}{2} \right) \Leftrightarrow x = -\ln \left( \frac{y^2 - 1}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$x = \ln \left( \frac{y^2 - 1}{2} \right)^{-1} \Leftrightarrow x = \ln \left( \frac{2}{y^2 - 1} \right) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \ln \left( \frac{2}{y^2 - 1} \right), y > 1$$

Άρα είναι:

$$f^{-1}(x) = \ln \left( \frac{2}{x^2 - 1} \right), x > 1.$$

**Υποσημείωση:** Το σύγολο τιμών της  $f$ , το οποίο είναι το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$ , μπορεί να βρεθεί από την συνέχεια και την μονοτονία της  $f$ .

Γ4. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα  $I = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{f^2(x)} dx$ .

Έχουμε:

$$I = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{f^2(x)} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{2e^{-x} + 1} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{\frac{2}{e^x} + 1} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x + 1}{\frac{2 + e^x}{e^x}} dx = \int_{\ln(e-2)}^0 \frac{e^x(e^x + 1)}{e^x + 2} dx$$

Θέτουμε  $e^x = u$ , οπότε  $e^x dx = du$ .

Επίσης  $e^x + 1 = u + 1 > 0$  και  $e^x + 2 = u + 2 > 0$ .

Για  $x = \ln(e-2)$  είναι  $u = e^{\ln(e-2)} = e-2$ .

Για  $x = 0$  είναι  $u = e^0 = 1$ .

Επομένως:

$$\begin{aligned} I &= \int_{e-2}^1 \frac{u+1}{u+2} du = \int_{e-2}^1 \frac{u+2-1}{u+2} du = \int_{e-2}^1 \left( 1 - \frac{1}{u+2} \right) du = \\ &= [u]_{e-2}^1 - [\ln(u+2)]_{e-2}^1 = 1 - (e-2) - (\ln 3 - \ln(e-2+2)) = \\ &= 1 - e + 2 - \ln 3 + \ln e = 4 - e - \ln 3. \end{aligned}$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = 0$ , ή ότι η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$ .

Η συνάρτηση  $g(x) = \ln x + x$  είναι παραγωγίσιμη για κάθε  $x > 0$  με:

$$g'(x) = (\ln x + x)' = \frac{1}{x} + x > 0, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

**1<sup>ος</sup> τρόπος**

Συνεπώς η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0,1)$  και επειδή είναι συνεχής στο  $(0,1)$ , έχουμε:

$$g((0,1)) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \right) = (-\infty, 1),$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x + x) = 1$$

Επειδή  $0 \in g((0,1))$  η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει ρίζα στο διάστημα  $(0,1)$  και αφού η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό η ρίζα θα είναι μοναδική.

**2<sup>ος</sup> τρόπος**

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x + x) = -\infty.$$

Οπότε υπάρχει  $\alpha$  κοντά στο  $0^+$  με  $0 < \alpha < 1$  τέτοιο, ώστε  $g(\alpha) < 0$ .

$$\text{Επίσης } g(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0.$$

$$\text{Επομένως } g(\alpha) \cdot g(1) < 0.$$

Επειδή η  $g$  είναι και συνεχής στο  $[\alpha, 1] \subseteq (0,1)$  σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano η συνάρτηση  $g$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(\alpha, 1) \subseteq (0,1)$ .

Επιπλέον η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0,1)$ , οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

**3<sup>ος</sup> τρόπος**

**Ενδεικτικά**, εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano για την  $g$  στο διάστημα  $\left[ \frac{1}{e}, 1 \right]$ .



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

Στη συνέχεια θα λύσουμε την εξίσωση  $e^{x-x_0} = \frac{x_0}{x}$ .

Επειδή  $x_0 > 0$  θα πρέπει και  $x > 0$ , οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$e^{x-x_0} = \frac{x_0}{x} \Leftrightarrow \ln e^{x-x_0} = \ln \frac{x_0}{x} \Leftrightarrow x - x_0 = \ln x_0 - \ln x \Leftrightarrow$$

$$x + \ln x = x_0 + \ln x_0 \Leftrightarrow g(x) = g(x_0). \quad (1)$$

Όμως η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, οπότε έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow g(x) = g(x_0) \stackrel{g:1-1}{\Leftrightarrow} x = x_0.$$

**Δ2. i)** Για  $0 < a < 1$ , το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \int_a^1 |g(x) - x| dx.$$

Έχουμε:

$$x \leq 1 \stackrel{\ln x}{\Leftrightarrow} \ln x \leq \ln 1 \Leftrightarrow \ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x + x \leq x \Leftrightarrow g(x) \leq x \Leftrightarrow g(x) - x \leq 0.$$

Συμπεπώς στο  $[a, 1]$  είναι  $|g(x) - x| = x - g(x)$ .

Επομένως είναι:

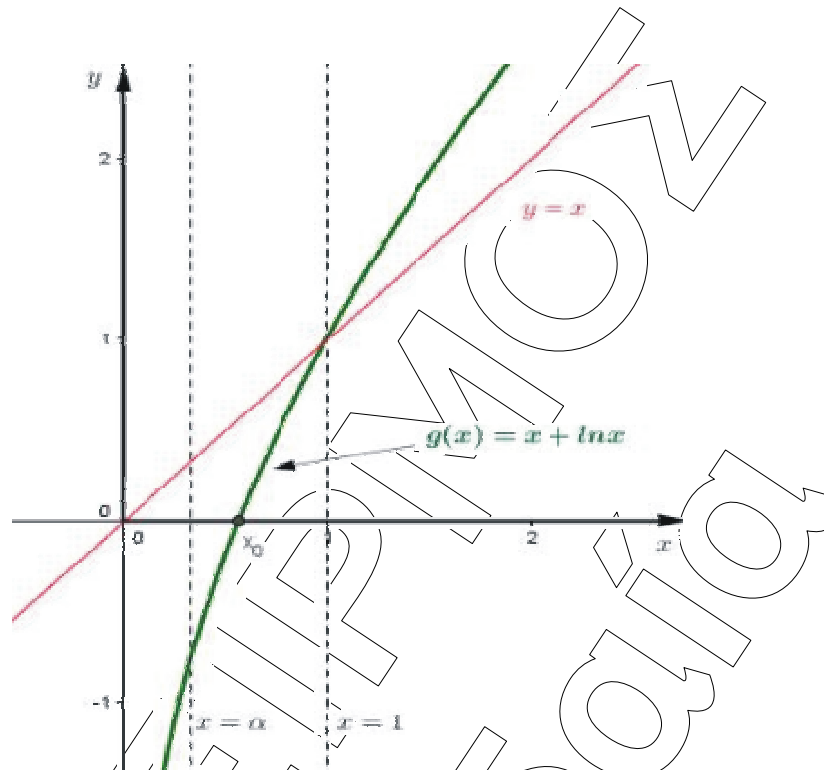
$$E = \int_a^1 (x - g(x)) dx = \int_a^1 (x - \ln x - x) dx = \int_a^1 (-\ln x) dx = \int_1^a \ln x dx =$$

$$= \int_1^a (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^a - \int_1^a x (\ln x)' dx = a \ln a - \int_1^a x \frac{1}{x} dx =$$

$$= a \ln a - \int_1^a 1 dx = a \ln a - [x]_1^a = a \ln a - a + 1 \text{ τ.μ.}$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
 Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**



- ii) Από υπόθεση έχουμε ότι  $\alpha'(t) = 1 \text{ cm/sec}$ .  
 Αυτό σημαίνει ότι η τιμή του αριθμού  $\alpha$  αυξάνει, δηλαδή κινείται απομακρυνόμενος από το 0 και προσεγγίζοντας το 1, αφού  $0 < \alpha < 1$ .  
 Επειδή η θέση του αριθμού  $\alpha$  είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$  έχουμε:

$$E(t) = \alpha(t) \cdot \ln(\alpha(t)) - \alpha(t) + 1.$$

Ο ρυθμός μεταβολής του είναι:

$$E'(t) = \alpha'(t) \cdot \ln(\alpha(t)) + \alpha(t) \cdot (\ln(\alpha(t)))' - \alpha'(t) =$$

$$= \alpha'(t) \cdot \ln(\alpha(t)) + \alpha(t) \cdot \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} - \alpha'(t) =$$

$$= \alpha'(t) \cdot \ln(\alpha(t)) + \alpha'(t) - \alpha'(t) = \alpha'(t) \cdot \ln(\alpha(t)).$$

Την χρονική στιγμή  $t_0$  στην οποία είναι  $\alpha(t_0) = x_0$  έχουμε:

$$E'(t_0) = \alpha'(t_0) \cdot \ln(\alpha(t_0)) = 1 \cdot \ln x_0 = \ln x_0.$$

Όμως από Δ1. ερώτημα ισχύει ότι:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 + x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0.$$

Συνεπώς  $E'(t_0) = -x_0 \text{ cm}^2/\text{sec}$ .

**Δ3.** Από υπόθεση για κάθε  $x > 0$  έχουμε:

$$f(g(x)) = f(x) + e^x(x-1) + \ln x.$$

Επομένως θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(g(x))) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + e^x(x-1) + \ln x).$$

- Για το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(g(x)))$

Στο ερώτημα Δ1. δείξαμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ .

Θέτοντας  $u = g(x)$  έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0^+} u = -\infty$ .

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(g(x))) = \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u)$  που είναι και το ζητούμενο.

- Για το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + e^x(x-1) + \ln x)$ .

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα και συνεχής σε αυτό.

Συνεπώς:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \quad (1).$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = e^0 = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1) = 0-1 = -1.$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x(x-1)) = -1. \quad (2)$$

$$\text{Επιπλέον γνωρίζουμε ότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty. \quad (3)$$

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) + e^x(x-1) + \ln x) = f(0) - 1 + (-\infty) = -\infty.$$

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty \text{ ή } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

**Δ4.** Για κάθε  $x > 0$ , έχουμε:

$$f(g(x)) = f(x) + e^x(x-1) + \ln x \Leftrightarrow f(g(x)) - f(x) = xe^x - e^x + \ln x \Leftrightarrow$$

$$f(g(x)) - f(x) = e^{\ln x} e^x - e^x + \ln x \Leftrightarrow f(g(x)) - f(x) = e^{\ln x + x} - e^x + \ln x \Leftrightarrow$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

$$f(g(x)) - f(x) = e^{g(x)} - e^x + \ln x.$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας με τον όρο  $g(x) - x = \ln x > 0$ , για κάθε  $x > 1$  και έχουμε:

$$\frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} = \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x} + \frac{\ln x}{g(x) - x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} = \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x} + \frac{\ln x}{\ln x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x} = \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x} + 1. (1)$$

- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , επομένως είναι συνεχής στο  $[x, g(x)]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x, g(x))$ , για κάθε  $x > 1$ .

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την  $f$  στο  $[x, g(x)]$ , επομένως θα υπάρχει  $\xi_1 \in (x, g(x))$  με  $1 < x < \xi_1 < g(x)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(g(x)) - f(x)}{g(x) - x}. (2)$$

- Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = e^x$  η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , επομένως είναι συνεχής στο  $[x, g(x)]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x, g(x))$ , για κάθε  $x > 1$ , με  $h'(x) = e^x$ .

Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την  $h$  στο  $[x, g(x)]$ , επομένως θα υπάρχει  $\xi_2 \in (x, g(x))$  με  $1 < x < \xi_2 < g(x)$  τέτοιο, ώστε:

$$h'(\xi_2) = e^{\xi_2} = \frac{e^{g(x)} - e^x}{g(x) - x}. (3)$$

Από τις (2) και (3) η (1) δίνει:  $f'(\xi_1) = e^{\xi_2} + 1$ , με  $\xi_1 > 1$  και  $\xi_2 > 1$ .

**Ενδεικτικά ένας 2<sup>ος</sup> τρόπος είναι:**

Για κάθε  $x > 0$ , έχουμε:

$$f(g(x)) = f(x) + e^x(x-1) + \ln x \Leftrightarrow f(g(x)) - f(x) = xe^x - e^x + \ln x \Leftrightarrow$$

$$f(g(x)) - f(x) = e^{\ln x} e^x - e^x + \ln x \Leftrightarrow f(g(x)) - f(x) = e^{\ln x + x} - e^x + \ln x \Leftrightarrow$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

$$f(g(x)) - f(x) = e^{g(x)} - e^x + \ln x.$$

$$\text{Οπότε: } f(g(x)) - e^{g(x)} - g(x) = f(x) - e^x - x. \quad (1)$$

$$\text{Έστω η συνάρτηση } y(x) = f(x) - e^x - x, x > 0.$$

$$\text{Τότε η (1) γίνεται: } y(g(x)) = y(x), \text{ για κάθε } x > 0. \quad (2)$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Rolle για την συνάρτηση  $y$  στο  $[x, g(x)]$

για κάθε  $x > 1$ .

Η  $y$  είναι συνεχής στο  $[x, g(x)]$  και παραγωγίσιμη στο  $(x, g(x))$  για κάθε  $x > 1$ , ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων στα διαστήματα αυτά.

$$\text{Λόγω της (2) ισχύει } y(g(x)) = y(x).$$

Άρα υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός  $\xi \in (x, g(x))$ , άρα και  $\xi > 1$ , τέτοιος ώστε  $y'(\xi) = 0$ .

$$\text{Όμως } y'(x) = f'(x) - e^x - 1, \text{ οπότε } f'(\xi) - e^\xi - 1 = 0.$$

$$\text{Οπότε έχουμε } f'(\xi) = e^\xi + 1, \xi > 1.$$

Για  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$  έπεται το ζητούμενο.