



2019 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Μ. Τετάρτη 24 Απριλίου 2019 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

## ΘΕΜΑΤΑ

### ΘΕΜΑ Α

**A.** Θεωρούμε δύο σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  του καρτεσιανού επιπέδου. Να αποδείξετε ότι το μέσο  $M$  του  $AB$  έχει συντεταγμένες  $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ .  
(8 μόρια)

**B.** Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ):

- i)** Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $(A, -B)$ .
- ii)** Η εξίσωση  $(x - 2y + 5) + \lambda(3x + 2y + 7) = 0$  παριστάνει ευθεία γραμμή η οποία για κάθε  $\lambda$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- iii)** Η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = 2px$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $yy'$  και διευθετούσα την ευθεία  $x = -p/2$ .
- iv)** Κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A^2 + B^2 \neq 0$ .
- v)** Το εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων είναι πάντα θετικός αριθμός.

(10 μόρια)

**Γ.** Αν  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{b} = (x_2, y_2)$  δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, βρείτε το  $\sin \theta$ , όπου  $\theta$  η γωνία που σχηματίζουν.  
(7 μόρια)



**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = 2\vec{i} - \vec{j}$  και  $\vec{\beta} = \vec{i} - 2\vec{j}$ .

i) Βρείτε το γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  και τα μέτρα των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ . (4 μόρια)

ii) Βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{v} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ . (5 μόρια)

iii) Αν  $\vec{\gamma} = 4\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$  τότε:  
α) βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\kappa$  (4 μόρια)

β) να γράψετε το  $\vec{\gamma}$  σαν γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  (6 μόρια)

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \cdot x + 2|\alpha + \beta|y + 1 = 0$  παριστάνει ευθεία για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  με  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = \sqrt{5}$ . (6 μόρια)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνονται τα σημεία  $K(\kappa, 0)$  και  $\Delta(0, \lambda)$  με  $\kappa, \lambda > 0$  και  $\kappa + \lambda = 2$ .

i) Ναδειχθεί ότι ο κύκλος  $C$  με διάμετρο  $K\Delta$ , διέρχεται από δύο σταθερά σημεία  $O(0, 0)$  και  $B(1, 1)$ . (6 μόρια)



## 2019 | Απρίλιος | Φάση 3 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

- ii) Αν  $\kappa = \lambda = 1$ , να βρείτε τις εφαπτόμενες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  του κύκλου  $C_1$  οι οποίες περνάνε από το σημείο  $P(1, -1)$ .  
(5 μόρια)
- iii) Υπολογίστε το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας των ευθειών  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .  
(4 μόρια)
- iv) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  και ο  $xx'$ .  
(4 μόρια)
- v) Αποδείξτε ότι το  $O(0, 0)$  είναι συμμετρικό του  $B$  ως προς την  $K\Lambda$ .  
(6 μόρια)

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση  $(x + 2\mu)x + (y - 4\mu - 4)y + 4(2\mu + 1) = 0$  (1).

- i) Ναδειχθεί ότι η (1) παριστάνει κύκλο  $C_\mu$  για κάθε  $\mu \neq 0$ . Τι γίνεται αν  $\mu = 0$ ;  
(6 μόρια)
- ii) Βρείτε τη γραμμή που διαγράφουν τα κέντρα των παραπάνω κύκλων.  
(5 μόρια)
- iii) Για ποια τιμή του  $\mu$  ο αντίστοιχος κύκλος  $C_\mu$ , διέρχεται από την αρχή των αξόνων;  
(3 μόρια)
- iv) Αν  $C_{(-1/2)}$  είναι ο κύκλος που προκύπτει για  $\mu = -1/2$  και  $(\epsilon)$  η ευθεία με εξίσωση  $y = \lambda x + 2$ , να βρείτε το  $\lambda$  ώστε η  $(\epsilon)$  να τέμνει τον  $C_{(-1/2)}$  σε δύο σημεία  $A, B$  ώστε  $\hat{AOB} = 90^\circ$ .  
(6 μόρια)



- v) Ένα πλοίο Π βρίσκεται στην εστία της παραβολής με εξίσωση  $x = \frac{1}{4}y^2$ . Αν ένας φάρος  $\Phi_1$  βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου  $C_1$  (που προκύπτει για  $\mu = 1$ ), να εξετάσετε αν ο φάρος αυτός είναι ορατός από το πλοίο Π. (Ο φάρος  $\Phi_1$  εκπέμπει σήματα ορατά σε ένα κυκλικό δίσκο, με ακτίνα ίση με την ακτίνα του  $C_1$ ).

(5 μόρια)