ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Μ. Τετάρτη 24 Απριλίου 2019 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 33

Β. Λ – Λ – Λ – Λ – Λ

Γ. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 43

ΘΕΜΑ Β

i) $\vec{\alpha}=(2,-1)$ και $\vec{\beta}(1,-2)$ άρα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot 1-1(-2)=4$ με $\left|\vec{\alpha}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

και $\left|\vec{\beta}\right|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$

ii) $\vec{u}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(2,-1)-(1,-2)=(2-1,-1+2)=(1,1)$

και $\vec{v}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}=2(2,-1)-(1,-2)=(4,-2)-(1,-2)=(4-1,-2+2)=(3,0)$

$$\text{συν}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{(1,1)\cdot(3,0)}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+0^2}}=\frac{1\cdot 3+1\cdot 0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}}=\frac{3}{\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

άρα $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

iii) $\vec{\gamma}=4\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}=4(2,-1)-\kappa(1,-2)=(8,-4)+(-\kappa,+2\kappa)=(8-\kappa,-4+2\kappa)$

α) και αφού $\vec{\alpha}\perp\vec{\gamma}$: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0\Leftrightarrow(2,-1)(8-\kappa,-4+2\kappa)=0\Leftrightarrow 2(8-\kappa)-(-4+2\kappa)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16+4-2\kappa-2\kappa=0\ \Leftrightarrow 20-4\kappa=0\ \Leftrightarrow\ \kappa=5$

β) $\vec{\gamma}=\mu\cdot\vec{u}+\rho\cdot\vec{v}\Leftrightarrow(8-5,-4+2\cdot 5)=\mu\cdot(1,1)+\rho\cdot(3,0)$

$(3,6)=(\mu,\mu)+(3\rho,0)\Leftrightarrow(3,6)=(3\rho+\mu,\mu)$

$$\left.\begin{matrix}3\rho+\mu=3\\ \mu=6\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}3\rho+6=3\\ \mu=6\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}\rho=-1\\ \mu=6\end{matrix}\qquad \text{άρα } \vec{\gamma}=6\vec{u}-\vec{v}$$

iv) <u>**Α΄ τρόπος**</u>:

Για να παριστάνει η (1) ευθεία, αφού έχει τη γενική της μορφή θα πρέπει να μη μηδενίζονται ταυτόχρονα το $\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|$ και το $2\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$

- Αν $\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=0$ τότε $2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\Leftrightarrow 2\vec{\alpha}=\vec{\beta}$ δηλαδή $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$
- Αν $\left|\alpha+\beta\right|=0$ τότε $\alpha+\beta=0\Leftrightarrow\ \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ ΑΤΟΠΟ

Β΄ τρόπος:

$$\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=(2\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=4\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4|\vec{\alpha}|^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=$$

$$=4\cdot5-4\cdot(-1)+10=34 \text{ δηλαδή } \left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{34}$$

$$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+|\vec{\beta}|^2=$$

$$=5+2\cdot(-1)+10=13 \text{ δηλαδή } \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{13} \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

ΘΕΜΑ Γ

i) Ο κύκλος C με διάμετρο το $ΚΛ$ έχει κέντρο το μέσο M του $ΚΛ$ και ακτίνα $\rho=\frac{(ΚΛ)}{2}$. Άρα $M=\left(\frac{\kappa}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$ και $\rho=\frac{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}{2}$.

Έχει μορφή: $\left(x-\frac{\kappa}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\lambda}{2}\right)^2=\frac{\kappa^2+\lambda^2}{4}\Leftrightarrow x^2-x\kappa+\frac{\kappa^2}{4}+y^2-\lambda y+\frac{\lambda^2}{4}=$

$$=\frac{\kappa^2+\lambda^2}{4}\Leftrightarrow 4x^2+4y^2-4\kappa x-4\lambda y+\kappa^2+\lambda^2=\kappa^2+\lambda^2\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow x^2+y^2-\kappa x-\lambda y=0\\ \text{Αφού } \kappa+\lambda=2\Rightarrow\lambda=2-\kappa\end{array}\right\} x^2+y^2-\kappa x-(2-\kappa)y=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\kappa x-2y+\kappa y=0\Leftrightarrow\left(x^2+y^2-2y\right)+\kappa(y-x)=0$$

Κάθε κύκλος διέρχεται λοιπόν από τα κοινά σημεία των: $x^2+y^2-2y=0$ και $y-x=0$, δηλαδή από τη λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{r}x^2+y^2-2y=0\\ y-x=0\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}2x^2=2x\\ x=y\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}x=0,x=1\\ x=y\end{array}\right\} \text{ δηλαδή από τα σημεία Ο(0,0) και Β(1,1)}$$

ii) Αν $\kappa=\lambda=1$ ο κύκλος είναι της μορφής $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ δηλαδή έχει κέντρο $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Οι εφαπτόμενες του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $P(1,\ -1)$ είναι της μορφής $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ δηλαδή $y + 1 = \lambda(x - 1) \Leftrightarrow \lambda x - y - \lambda - 1 = 0$. $(PM) > \rho$, δηλ. P εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε από το P διέρχονται δύο εφαπτομένες προς τον κύκλο C_1, άρα ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης λ για μία τουλάχιστον από τις δυο εφαπτομένες.

$$d(M,\varepsilon)=\rho \Leftrightarrow \frac{\left|\lambda\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\lambda\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{\lambda}{2}-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

Άρα $\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{2}|\lambda+3|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow |\lambda+3|=\sqrt{2\left(\lambda^2+1\right)}\Leftrightarrow(\lambda+3)^2=2\left(\lambda^2+1\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2+6\lambda+9=2\lambda^2+2\Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda-7=0$ με ρίζες $\lambda_1=-1$ και $\lambda_2=-7$

Άρα υπάρχουν δύο εφαπτόμενες: ε_1: $-1x - y - (-1) - 1=0 \Leftrightarrow x + y = 0$ και ε_2: $7x - y - 7 - 1=0 \Leftrightarrow 7x - y - 8 = 0$.

iii) Για να βρω τη γωνία των $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ πρέπει να βρω δύο διανύσματα παράλληλα με κάθε μία και να υπολογίσω τη γωνία τους.

Έχω $\vec{\delta_1}=(1,-1)$ και $\vec{\delta_2}=(-1,-7)$ ή πιο απλά $(1,7)$

$$\text{συν}\left(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\right)=\text{συν}\left(\widehat{\vec{\delta_1},\vec{\delta_2}}\right)=\frac{\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}}{\left|\vec{\delta_1}\right|\cdot\left|\vec{\delta_2}\right|}=\frac{(1,-1)\cdot(1,7)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+7^2}}=$$

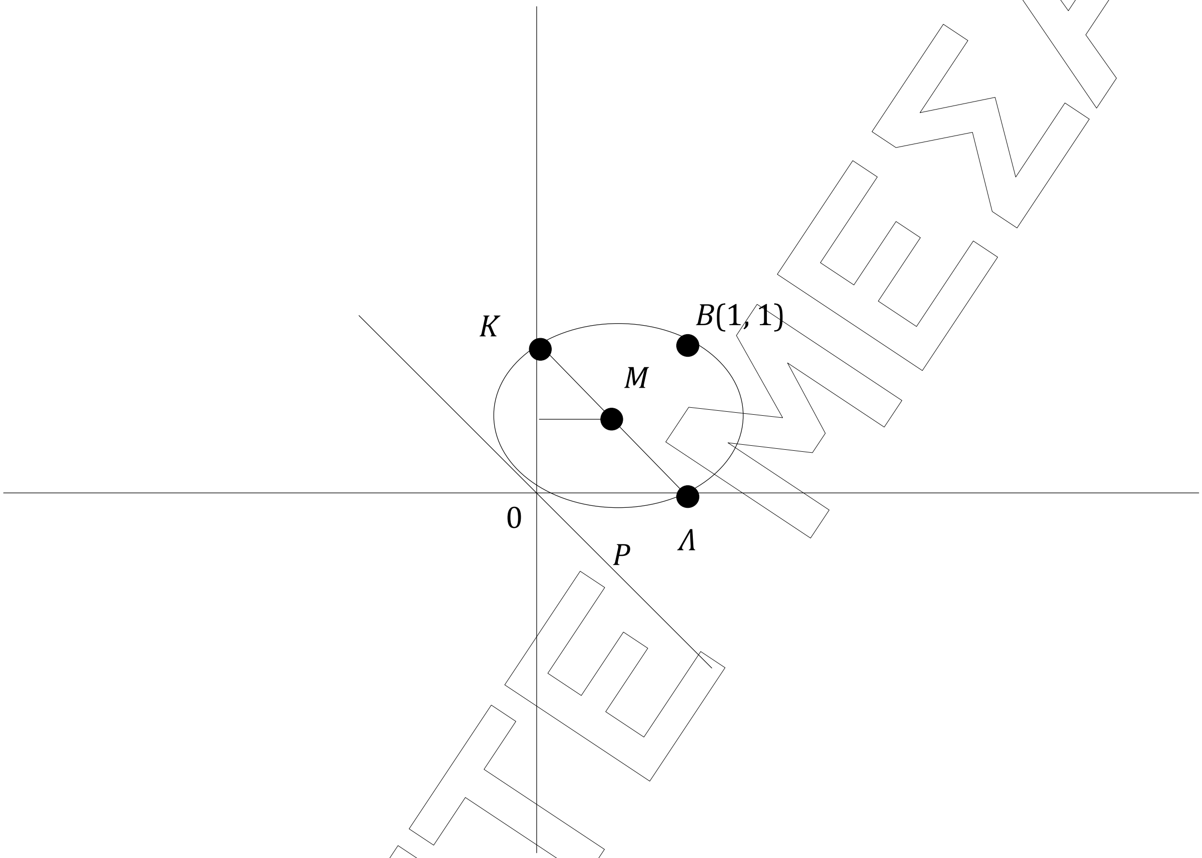
$$=\frac{1\cdot1-1\cdot7}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}}=\frac{-6}{\sqrt{100}}=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}$$

iv) Η ε_1 τέμνει τον xx' στο $O(0,\ 0)$, η $\varepsilon_2: 7x-y-8=0$ τέμνει τον xx' στο $\Lambda\left(\frac{8}{7},0\right)$

και το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι η λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{cases} x+y=0 \\ 7x-y-8=0\end{cases}\right\}\Leftrightarrow \begin{matrix} 8x-8=0\Rightarrow x=1 \\ y=1\end{matrix} \qquad P(1,-1)$$

Άρα $(PO\Lambda)=\dfrac{1}{2}(O\Lambda)\cdot d\left(P,xx'\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{7}\cdot|-1|=\dfrac{4}{7}$ τ.μ. $\left(d\left(P,xx'\right)=\left|y_P\right|\right)$.



ν) Το κέντρο M του κύκλου είναι το μέσο του OB και μέσο του $K\Lambda$. Επίσης $OB = 2\rho$ και $K\Lambda = 2\rho$, άρα τα σημεία O, B και K, Λ είναι αντιδιαμετρικά. Τέλος αφού $\vec{OB} \perp \vec{K\Lambda}$ το O είναι συμμετρικό του B ως προς $K\Lambda$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{OB} = (1,1) \\ \vec{K\Lambda} = (-1,1) \end{array}\right\} \text{ και } \vec{OB} \cdot \vec{K\Lambda} = (1,1)\cdot(-1,1) = 0, \text{ δηλαδή } \vec{OB} \perp \vec{K\Lambda}$$

ΘΕΜΑ Δ

i) $(x+2\mu)x+(y-4\mu-4)y+4(2\mu+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+2\mu x-4(\mu+1)y+4(2\mu+1)=0,$

η οποία είναι μορφή κύκλου με $A = 2\mu 1$, $B = -4(\mu + 1)$ και $\Gamma = 8\mu + 4$.

Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = (2\mu)^2 + [-4(\mu + 1)]^2 - 4(8\mu + 4) = 20\mu^2 > 0$ για $\mu > 0$, άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-A/2, -B/2)$:$(-\mu, 2\mu + 2)$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{\sqrt{20\mu^2}}{2}=|\mu|\sqrt{5}$. Αν $\mu = 0$ η εξίσωση παριστάνει σημείο.

ii) $\left.\begin{array}{r} x_\kappa=-\mu \\ y_\kappa=2\mu+2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x_\kappa=-2\mu \\ y_\kappa=2\mu+2 \end{array}\right\} + 2x_\kappa+y_\kappa=2,$

δηλαδή τα κ βρίσκονται στην ευθεία ε: $2x + y - 2 = 0$.

iii) Αν $x = y = 0$ τότε $2\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu = -1/2$

iv) Αν $\mu =-1/2$ τότε έχουμε τον κύκλο $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$ και εφόσον τα $\hat{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$, αυτή βαίνει σε ημικύκλιο, άρα τα A, B είναι αντιδιαμετρικά του κύκλου C_1. Άρα η (ε) περνάει από το κέντρο του κύκλου όπου $K=\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ για $\mu = -1/2$. Δηλαδή το K την επαληθεύει: $1=\dfrac{\lambda}{2}+2\Rightarrow\lambda=-2$.

v) Η παραβολή είναι της μορφής: $y^2 = \kappa x$, με $\rho = 2$ και εστία $E(1, 0)$, $K(-1, 4)$.

Για $\mu = 1$ ο κύκλος έχει $\rho=\sqrt{5}$.

Αλλά $(EK)=\sqrt{(-1-1)^2+(4-0)^2}=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}>\sqrt{5}=\rho$, άρα το πλοίο βρίσκεται εντός του φωτιζόμενου κυκλικού δίσκου του φάρου.