

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 4 Μαΐου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι (ε): $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 11

A.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $y = \frac{1}{2p}x^2$ με $p > 0$ παριστάνει παραβολή με άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

β. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, παριστάνει μια ευθεία για κάθε $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$.

γ. Τα διανύσματα $\vec{i} = (1, 0)$ και $\vec{j} = (0, 1)$ είναι ίσα.

δ. Η απόσταση του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι ίση με $d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

ε. Η εξίσωση $x^2 + y^2 = a$, παριστάνει κύκλο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

A.3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Αν δυο διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, τότε είναι ίσα».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A** αν είναι αληθής ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β

Στον εναέριο χώρο της Ελλάδας κινούνται δύο αεροπλάνα που ακολουθούν τις παρακάτω πορείες:

- Το πρώτο αεροπλάνο κινείται στη γραμμή γ_1 όπου κάθε σημείο της σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (στο χάρτη) είναι της μορφής $A(\lambda+1, \lambda+3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Το δεύτερο αεροπλάνο κινείται στη ευθεία γ_2 που περνάει από το αεροδρόμιο των Ιωαννίνων με συντεταγμένες $I(-2, -2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} \equiv (-2, 2)$.

B.1. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής γ_1 .

Μονάδες 4

B.2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας γ_2 .

Μονάδες 7

B.3. Στο σημείο $O(0,0)$ βρίσκεται το αεροδρόμιο Αθηνών. Αν οι γραμμές είναι οι ευθείες $\gamma_1: y = x + 2$ και $\gamma_2: y = -x - 4$.

α. ποιο αεροπλάνο θα περάσει πιο κοντά από το αεροδρόμιο Αθηνών;

Μονάδες 7

β. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ION όπου N το σημείο τομής μεταξύ των γ_1 και γ_2 .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραβολή $C_1 : y^2 = 2\bar{\beta}(\bar{\beta} - 2\bar{a})x$ και ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 - |\bar{\beta}|(x + 4(\bar{a} \cdot \bar{\beta})y) + 15 = 0$, όπου \bar{a} και $\bar{\beta}$ διανύσματα για τα οποία ισχύουν $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{\beta}| = 2$ και $(\bar{a} + \bar{\beta})(3\bar{a} - \bar{\beta}) = 1$.

Γ.1. Να αποδείξετε ότι $\bar{a}\bar{\beta} = 1$ και $\left(\widehat{\bar{a}, \bar{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$

Μονάδες 6

Γ.2. Να βρείτε την εστία E και την εξίσωση της διευθετούσας (δ) της παραβολής C_1 , καθώς επίσης το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου C_2 .

Μονάδες 7

Γ.3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της παραβολής C_1 στο σημείο της $A(1,2)$ εφάπτεται και στο κύκλο C_2 .

Μονάδες 6

Γ.4. Να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη απόσταση της εστίας $E(1,0)$ από το κύκλο C_2 .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda^4 + \lambda^2)x^2 + (-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2)y^2 - 6\lambda(\lambda^2 + 1)x - (8\lambda^2 + 8)y + 16\lambda^2 + 16\lambda^4 = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Δ.1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο C αν και μόνο αν $\lambda = 1$.

Μονάδες 4

Δ.2. Αν $\lambda = 1$, τότε:

α. Να βρείτε το κέντρο Θ και την ακτίνα ρ του κύκλου C .

Μονάδες 4

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019**
Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ2Θ(ε)

- β. Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων του κύκλου C , από την ευθεία $(\eta): 3x + 4y + 15 = 0$.

Μονάδες 5

- γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C που διέρχονται από την αρχή των αξόνων O .

Μονάδες 8

- δ. Έστω K και L σημεία του κύκλου C για τα οποία ισχύει $KL = 6$. Να βρείτε το μέτρο $|\overline{OK} + \overline{OL}|$.

Μονάδες 4

ΣΥΝΕΙΡΜΟΝ
ΑΡΙΘΜΟΝ