

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 134

A2.

(α) $\ln e^{-\theta} = -\theta$

(β) $e^{\ln \theta} = \theta$

(γ) $\ln 1 = 0$

(δ) $\ln \frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = 0 - 1 = -1$

(ε) $\ln^2 e^2 = (\ln e^2)^2 = (2 \ln e)^2 = 4$

A3. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Εφόσον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(3\pi, 3)$ ισχύει:

$$f(3\pi) = 3 \Leftrightarrow \alpha - \beta \eta \mu \frac{3\pi}{2} = 3 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 3 \quad (1)$$

Επίσης

$$f(\pi) = -1 \Leftrightarrow \alpha - \beta \eta \mu \frac{\pi}{2} = -1 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -1 \quad (2)$$

Επομένως έχουμε το σύστημα των εξισώσεων (1), (2)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta - 1 + \beta = 3 \\ \alpha = \beta - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\beta = 4 \\ \alpha = \beta - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

B2. Η συνάρτηση γίνεται $f(x) = 1 - 2\eta\mu\frac{x}{2}$ με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$

Έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$-1 \leq \eta\mu\frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\eta\mu\frac{x}{2} \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq f(x) \leq 3$$

Επομένως η μέγιστη τιμή της είναι το 3 και η ελάχιστη τιμή της το -1 εφόσον

$$f(3\pi) = 3 \text{ και } f(\pi) = -1$$

B3. Η εξίσωση $f^2(x) + 4 = 4f(x)$ ισοδύναμα γίνεται

$$f^2(x) - 4f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow (f(x) - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu\frac{x}{2} - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\frac{x}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{2} = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 4\kappa\pi + \frac{7\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}, x \in [0, 4\pi]$$

Αναζητάμε τις λύσεις στο διάστημα $[0, 4\pi]$

$$0 \leq x \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 \leq 4\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 \leq 4\kappa - \frac{1}{3} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12\kappa - 1 \leq 12 \Leftrightarrow 1 \leq 12\kappa \leq 13 \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{13}{12}$$

Επειδή $\kappa \in \mathbb{Z}$ η μόνη τιμή του ακεραίου κ που βρίσκεται στο διάστημα

$$\left[\frac{1}{12}, \frac{13}{12}\right] \text{ είναι η } \kappa = 1 \text{ επομένως η λύση είναι } x = 4\pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{11\pi}{3}$$

$$0 \leq x \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 \leq 4k\pi + \frac{7\pi}{3} \leq 4\pi \Leftrightarrow 0 \leq 4k + \frac{7}{3} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 12k + 7 \leq 12 \Leftrightarrow -7 \leq 12k \leq 5 \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{1}{12}$$

Επειδή $k \in \mathbb{Z}$ η μόνη τιμή του ακεραίου k που βρίσκεται στο διάστημα $\left[-\frac{7}{12}, \frac{1}{12}\right]$ είναι η $k=0$ επομένως η λύση είναι $x = \frac{7\pi}{3}$

B4. Η εξίσωση γίνεται:

$$f(x) = \eta\mu \frac{39\pi}{2} - e \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu \left(20\pi - \frac{\pi}{2}\right) - e \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu \left(-\frac{\pi}{2}\right) - e$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu \frac{x}{2} = -1 - e \Leftrightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = 1 + \frac{e}{2}$$

Ισχύει $-1 \leq \eta\mu \frac{x}{2} \leq 1$ για κάθε πραγματικό αριθμό x επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Συμπληρώνοντας το σχήμα Horner έχουμε ότι

α	-8	22	-24	β	1
	α	$\alpha - 8$	$\alpha + 14$	$\alpha - 10$	
α	$\alpha - 8$	$\alpha + 14$	$\alpha - 10$	$\alpha - 10 + \beta$	

Επομένως με βάση το αρχικό ελλειπές σχήμα Horner

α	-8	22	-24	β	1
		15		0	

Προκύπτει:

$$\alpha + 14 = 15 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

και

$$\alpha - 10 + \beta = 0 \Leftrightarrow 1 - 10 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 9$$

Οπότε για $\alpha = 1$ και $\beta = 9$ το πολυώνυμο γίνεται

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$$

Γ2. Εφόσον το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου τότε με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε

1	-8	22	-24	9	1
	1	-7	15	-9	
1	-7	15	-9	0	

$$\text{Άρα } f(x) = (x-1)(x^3 - 7x^2 + 15x - 9) \quad (1)$$

Παραγοντοποιώντας το $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ με το σχήμα Horner έχουμε

1	-7	15	9	1
	1	-6	-9	
1	-6	9	0	

$$\text{Έχουμε } x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x-1)(x^2 - 6x + 9)$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$f(x) = (x-1)(x-1)(x^2 - 6x + 9) = (x-1)^2(x-3)^2$$

Από την τελευταία προκύπτει: $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$

Γ3. (i) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει και αρκεί

$$x^2 - 4x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ και } x \neq 3$$

$$\text{Επομένως } A_h = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$$

(ii) Για να βρούμε τα κοινά τους σημεία θα λύσουμε την εξίσωση

$$h(x) = x \text{ με } x \neq 1 \text{ και } x \neq 3$$

$$h(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{f(x)}{x^2 - 4x + 3} = x \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x-3)^2}{(x-1)(x-3)} = x-1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = x-1 \Leftrightarrow x-3=1 \Leftrightarrow x=4$$

Άρα το κοινό τους σημείο είναι το $A(4, 4)$

Γ4. Για την επίλυση της εξίσωσης, υπολογίζουμε τις τιμές της συνάρτησης

$$f(0) = 9, f(2) = 1 \text{ και } f(4) = 9$$

$$[f(2)]^x + 3 \cdot [f(4)]^{2x} = 4[f(0)]^x \Leftrightarrow 1 + 3 \cdot 9^{2x} = 4 \cdot 9^x$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 9^{2x} - 4 \cdot 9^x + 1 = 0$$

Θέτουμε στην τελευταία $9^x = \omega > 0$ οπότε μετασχηματίζεται ως εξής:

$$3\omega^2 - 4\omega + 1 = 0$$

Η τελευταία έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και $\frac{1}{3}$ επομένως

$$9^x = 1 \Leftrightarrow 9^x = 9^0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$9^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-1} \Leftrightarrow 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

(i) Για την συνάρτηση f πρέπει και αρκεί:

$$\frac{e^x - 1}{x} > 0 \Leftrightarrow x(e^x - 1) > 0$$

- $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$
- $e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-		+
$e^x - 1$	-		+
$x(e^x - 1)$	+		+

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι $A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(ii) Για την συνάρτηση g πρέπει και αρκεί:

$$\begin{cases} e^{x^2} - 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^2} > 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι $A_g = (0, +\infty)$

Δ2. $f(2x) - f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) - \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right) - \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) - \ln 2$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{2x}\right) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) - \ln 2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x(e^x - 1)(e^x + 1)}{2x(e^x - 1)}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 2e^x + 3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 2e^x + 3}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{e^x + 1}{2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 3}{2} \Leftrightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

Θέτουμε $e^x = y > 0$ άρα η εξίσωση γίνεται $y^2 - 3y + 2 = 0$

Η τελευταία έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 2

Επομένως

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ απορρίπτεται εφόσον πρέπει } x \neq 0$$

και

$$e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2 \text{ δεκτή}$$

Δ3. Η ανίσωση ορίζεται για εκείνα τα x για τα οποία ισχύει

$$x \in A_f \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x \in A_g \Leftrightarrow x > 0$$

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ και } x > 0$$

Δηλαδή πρέπει $x > 0$ άρα

$$f(x) + \ln x > g(x) + \ln x^2 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) + \ln x > g(x) + 2 \ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - 1) - \ln x + \ln x > \ln(e^{x^2} - 1) - 2 \ln x + 2 \ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x - 1) > \ln(e^{x^2} - 1) \Leftrightarrow x > x^2 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 1 > x$$

Άρα $x \in (0, 1)$

Δ4.

(i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) - f(-x) = x$

$$f(x) - f(-x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln\left(\frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) - \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{e^x - 1}{\frac{x}{1 - e^{-x}}}\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{1 - e^{-x}}\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{1 - \frac{1}{e^x}}\right) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{\frac{e^x - 1}{e^x}}\right) = \ln e^x = x$$

(ii) Αντικαθιστώντας στην σχέση $f(x) - f(-x) = x$ όπου $x = 2018$ παίρνουμε

$$f(2018) - f(-2018) = 2018 > 0$$

Άρα $f(2018) > f(-2018)$