2018 | Φάση 2 | Διαγωνίσματα Επανάληψης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών / Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Σάββατο 21 Απριλίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης:3 ώρες

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδειχθεί ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα $[\alpha,\beta]$ και G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t = G(\beta)-G(\alpha)$.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

Μονάδες 5

A3. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται 1-1;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ***Σωστό,*** αν η πρόταση είναι σωστή, ή ***Λάθος*** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, με $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$.

Μονάδες 2

β) Για κάθε συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$, ισχύει ότι $f(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Μονάδες 2

γ) Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση και 1-1 στο $\mathbb{R}$, τότε $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε δεν έχει ασύμπτωτες.

Μονάδες 2

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει ότι: $\int_\alpha^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x = \left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right|$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-x^2, & \text{αν } x\leq 1\\ x\ln(\beta x), & \text{αν } x>1\end{cases}$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $\beta>0$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

Β3. Θεωρούμε σημείο $A(x(t),y(t))$, με $t>0$ το οποίο κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f με $x(t)>1$ και $x'(t)=4\ \frac{\text{μονάδες}}{\text{sec}}$. Αν M είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A με τον άξονα $x'x$, να βρείτε την ταχύτητα του M την χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το A διέρχεται από το σημείο (e,e).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση *f*, ορισμένη στο A με σύνολο τιμών $f(A)=[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $e^{f(x)}+f(x)=x$, για κάθε $x\in A$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι $A=[1,+\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $f\circ f$ και έπειτα να βρείτε την μονοτονία της.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της *f*, του άξονα x΄x και της ευθείας $x=e+1$.

Μονάδες 7

Γ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει: $(x+1)\cdot f(x^2)>f(x^3)+x\cdot f(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $(x+1)f''(x)=e^x\cdot(x+2)-f'(x)$, για κάθε $x>-1$.
- $f(0)=1$
- $e^x-f(x)\le x$, για κάθε $x>-1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-\ln(x+1)$, x>-1.

Μονάδες 5

Δ3. **α)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f και να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $\xi_1 \in (-1,0)$ και $\xi_2 \in (0,+\infty)$.

Μονάδες 4

β) Να δείξετε ότι αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y=2$, τότε $E<\xi_2-\xi_1$.

Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to -1^+}\left(\eta\mu\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}\cdot \ln f(x)\right)$.

Μονάδες 5

Να έχετε επιτυχία!