ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' Γενικού Λυκείου

Θετικών Σπουδών

Σάββατο 14 Απριλίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α. Σχολικό βιβλίο σελίδα 83

Β. Σ – Λ – Σ – Σ - Λ

Γ. Β – Α – Β – Γ

ΘΕΜΑ Β

Α. **i.** Το μέτρο του $|\vec{\alpha}|$ ισούται με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{(|\vec{\alpha}|-2)^2 + (2|\vec{\alpha}|-2)^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\alpha|^2 = (|\vec{\alpha}| - 2)^2 + (2|\vec{\alpha}| - 2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\alpha|^2 = |\alpha|^2 - 4|\vec{\alpha}| + 4 + 4|\vec{\alpha}|^2 |-8|\vec{\alpha}| + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4|\vec{\alpha}|^2 - 12|\vec{\alpha}| + 8 = 0 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}|^2 - 3|\vec{\alpha}| + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 1$ ή $|\vec{\alpha}| = 2$

Δηλαδή το $\vec{\alpha} = (-1, 0)$ ή $(0, 2)$.

ii. Το $|\vec{\gamma}|$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ αν υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathrm{R}$ ώστε:

$\vec{\gamma}=\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}\Leftrightarrow(1,2)=\kappa\cdot(-1,0)+\lambda(3,1)\Leftrightarrow(1,2)=(-\kappa,0)+(3\lambda,\lambda)\Leftrightarrow$

$(1,2)=(3\lambda-\kappa,\ \lambda)\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}3\lambda-\kappa=1\\ \lambda=2\end{matrix}\right\}\ \begin{matrix}3\cdot2-\kappa=1\\ \lambda=2\end{matrix}\Big\}\ \begin{matrix}\kappa=5\\ \lambda=2\end{matrix}$

Έτσι $\vec{\gamma}=5\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$.

B. **i.** Η παραβολή με εστία $E(|\alpha|,0)$ δηλαδή $E(1,0)$ είναι της μορφής $y^2=4x$ και έστω η χορδή της AB με $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$.

Προφανώς $\left.\begin{matrix}{y_1}^2=4x_1\\ {y_2}^2=4x_2\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow {y_1}^2-{y_2}^2=4(x_1-x_2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(y_1-y_2)(y_1+y_2)=4(x_1-x_2)\quad(1)$

Αφού το σημείο K είναι μέσο του AB θα ισχύει:

$$\left.\begin{matrix}x_\kappa=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ y_\kappa=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{matrix}\right\}2y_\kappa=y_1+y_2\Leftrightarrow-2=y_1+y_2$$

Αντικαθιστώντας στην (1):

$(y_1-y_2)(-2)=4(x_1-x_2)\Leftrightarrow\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-2\Leftrightarrow\lambda_{AB}=-2$

και επειδή διέρχεται από το σημείο $K(2,-1)$ είναι της μορφής:
AB: $y+1=-2(x-2)\Leftrightarrow y=-2x+5$.

ii. Έστω το σημείο $N\left(\dfrac{\alpha^2}{4},\alpha\right)$ τυχαίο σημείο της παραβολής τέτοιο ώστε:

$\widehat{MON}=90°$ δηλαδή τα διανύσματα $\overrightarrow{MO}$ και $\overrightarrow{ON}$ είναι κάθετα:

$\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{ON}=0\Leftrightarrow(1,2)\cdot\left(\dfrac{\alpha^2}{4},\alpha\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{\alpha^2}{4}+2\alpha=0\Leftrightarrow\alpha^2+8\alpha=0\Leftrightarrow$

$\alpha(\alpha+8)=0\Leftrightarrow\alpha=-8$

(το $\alpha=0$ απορρίπτεται)
Έτσι το σημείο N έχει συντεταγμένες $N(16,-8)$.

iii. $M(1,\ 2)$, $E(1,\ 0)$ και $N(16,\ -8)$ οι κορυφές του τριγώνου MEN. Το εμβαδόν του δίνεται από τον τύπο:

$$E=\frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{EM},\overrightarrow{EN}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1-1 & 2-0\\ 16-1 & -8-0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}0 & 2\\ 15 & -8\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-30|=15\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Α. **i.**

$$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)=2\Leftrightarrow\ \vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=2 \qquad \left\{\begin{array}{l}|\vec{\alpha}|^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=2\\ 2|\vec{\alpha}|^2-2\vec{\alpha}\vec{\beta}=10\end{array}\right. \ +$$

$$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)=5\ \Leftrightarrow\ \vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\vec{\beta}\ =\ 5$$

$$3|\vec{\alpha}|^2=12\Leftrightarrow\ |\vec{\alpha}|^2=4\Leftrightarrow\ |\vec{\alpha}|=2$$

$$\text{και}\ \ \vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}=2\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2+2|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot\text{συν}\frac{2\pi}{3}=2$$

$$\Leftrightarrow\ 4+2\cdot2\cdot|\vec{\beta}|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=2\Leftrightarrow4-2|\vec{\beta}|=2\ \Leftrightarrow\ |\vec{\beta}|=1$$

ii) Αφού τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\ \Leftrightarrow\ \left(2\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\left(\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}\right)=0\Leftrightarrow\ 2\vec{\alpha}^2-2\kappa\cdot\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\alpha}\vec{\beta}-\kappa\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow2|\vec{\alpha}|^2-(2\kappa-1)\,\vec{\alpha}\vec{\beta}-\kappa|\vec{\beta}|^2=0\Leftrightarrow\ 2\cdot2^2-(2\kappa-1)2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\kappa\cdot1=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow8-(2\kappa-1)(-1)-\kappa=0\ \Leftrightarrow\ 8+2\kappa-1-\kappa=0\ \Leftrightarrow\ 7+\kappa=0\ \Leftrightarrow\ \kappa=-7$$

Β. **i.** Η (1) παριστάνει ευθεία γιατί είναι της μορφής $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ και δεν μηδενίζεται ταυτόχρονα το $\alpha(\lambda-1)$ και το $\beta(\lambda+2)$.

(1): $\lambda x-x+\lambda y+2y-3=\ \Leftrightarrow\ \lambda(x+y)+(-x+2y-3)=0$ η οποία ισχύει για κάθε λ αν έχει λύση το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{r}x+y=0\\-x+2y-3=0\end{array}\right\}\ \begin{array}{r}x=-y\\ y+2y-3=0\end{array}\Bigg\}\ \begin{array}{l}x=-1\\ y=1\end{array}\Bigg\}\quad A(-1,1),$$

το οποίο είναι το κοινό σημείο όλων των ευθειών.

ii. Η ευθεία (ε) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -A/B = -\dfrac{\lambda-1}{\lambda+2}$ $(\lambda \neq -2)$ και η ευθεία (n) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_n = \dfrac{1}{2}$.

Αφού $\varepsilon // n$:

$$-\frac{\lambda-1}{\lambda+2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(\lambda-1) = -(\lambda+2) \Leftrightarrow 2\lambda - 2 = -\lambda - 2 \Leftrightarrow 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

iii. Αν $\lambda = 0$ η (1) γίνεται ε: $-x + 2y - 3 = 0$. Ένα εύκολο σημείο της είναι το $B(-3, 0)$. Έτσι: $d(\varepsilon, n) = d(B, n) = \dfrac{|1(-3) - 2\cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Η μεσοπαράλληλη ευθεία ζ θα είναι της μορφής:

$$y = \frac{1}{2}x + B \Leftrightarrow 2y = x + 2B \Leftrightarrow x - 2y + 2B = 0$$

Προφανώς

$$\left.\begin{aligned} d(\varepsilon,\zeta) &= \frac{1}{2}d(\varepsilon,n) = \frac{1}{2}d(B,n) = \frac{\sqrt{5}}{5} = d(B,\zeta) \\ d(B,\zeta) &= \frac{|-3 - 2\cdot 0 + 2B|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2B-3|}{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{|2B-3|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow 5|2B-3| = 5 \Leftrightarrow |2B-3| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2B - 3 &= 1 \\ 2B - 3 &= -1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &2B = 4 \Leftrightarrow B = 2 \quad \text{απορ.} \\ &2B = 2 \Leftrightarrow B = 1 \quad \text{δεκτό} \end{aligned}$$

Άρα η μεσοπαράλληλη ευθεία είναι η ζ: $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

ΘΕΜΑ Δ

Α. Είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = 3, B = \lambda$ και $\Gamma = -10\cdot\lambda - 10$ με $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 10(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = 10(\lambda + 2)^2 > 0$ για $\lambda \neq -2$.
Για $\lambda = -2$ $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$ δηλαδή η (1) παριστάνει το σημείο (3, 1).

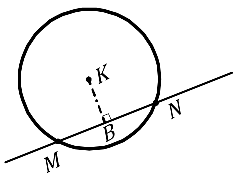
Β. Τα κέντρα των κύκλων είναι της μορφής $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$ δηλαδή $K\left(-\frac{3\lambda}{2},\frac{-\lambda}{2}\right)$.

Έτσι:

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{3\lambda}{2} \\ y&=-\frac{\lambda}{2} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x&=-\frac{3\lambda}{2} \\ 3y&=-\frac{3\lambda}{2} \end{aligned}\right\}$$

και αφαιρώντας τις σχέσεις έχουμε $x - 3y = 0$ που παριστάνει μια ευθεία.

Γ. Αν $\lambda = 1$ η (1) γίνεται $x^2 + y^2 + 3x + y - 20 = 0$ δηλαδή ένας κύκλος με κέντρο $K\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$



i. Αν $K\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$ και $B = (1, 2)$ το KB είναι απόστημα στην χορδή MN. $\lambda_{KB}=\frac{2+\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}=1$

και αφού $KB\perp MN: \lambda_{MN}=-1$

Έτσι η MN έχει εξίσωση: $y - 2 = -1(x - 1) \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$.

ii. $$(KB)=d(K,MN)=\frac{|Ax_0+By_0+\Gamma|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-3\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Δ. Αν $\lambda=0$ η (1) γίνεται $x^2 + y^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$ δηλαδή ο κύκλος με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα $p=\sqrt{10}$.

i. Οι εφαπτόμενες που περνάνε από το σημείο $\Gamma(5,5)$ προς τον κύκλο είναι της μορφής ε: $xx_1 + yy_1 = 10$. Δηλαδή $5x_1 + 5y_1 = 10 \Leftrightarrow x_1 + y_1 = 2$ (1) όπου (x_1, y_1) το σημείο επαφής. Επειδή (x_1, y_1) ανήκει στον κύκλο θα ισχύει: $x_1^2 + y_1^2 + 10$ (2). Τα σημεία (x_1, y_1) είναι οι λύσεις του συστήματος.

$$\left.\begin{array}{r}x_1^2+y_1^2=10\\ x_1+y_1=2\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}x_1^2+y_1^2=10\\ x_1=2-y_1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}(2-y_1)^2+y_1^2=10\\ x_1=2-y_1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}4-4y_1+y_1^2+y_1^2=10\\ x_1=2-y_1\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}2y_1^2-4y_1-6=0\\ x_1=2-y_1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}y_1^2-2y_1-3=0\\ x_1=2-y_1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}y_1=3 \text{ ή } y_1=-1\\ x_1=-1 \text{ ή } x_1=3\end{array}$$

Δηλαδή $(x_1, y_1) = (-1, 3)$ με εφαπτομένη ευθεία ε_1: $-x + 3y = 10$
και $(x_1, y_1) = (3, -1)$ με εφαπτομένη ευθεία ε_2: $3x - y = 10$.

ii. Βρίσκω δύο διανύσματα $\vec{\delta}_1$ και $\vec{\delta}_2$ που είναι παράλληλα με τις ευθείες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα.

Γενικά η ευθεία ε: $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\delta}=(B,-A)$. Εδώ λοιπόν:

$\vec{\delta}_1 // \varepsilon_1$ αν $\vec{\delta}_1=(3,1)$ και $\vec{\delta}_2 // \varepsilon_2$ αν $\vec{\delta}_2=(-1,-3)$ ή σε απλούστερη εκδοχή $(1, 3)$.

Έτσι: $$\text{συν}\left(\widehat{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\right)=\text{συν}\left(\widehat{\vec{\delta}_1,\vec{\delta}_2}\right)=\frac{\vec{\delta}_1\cdot\vec{\delta}_2}{|\vec{\delta}_1|\cdot|\vec{\delta}_2|}=\frac{(3,1)(1,3)}{|(3,1)|\cdot|(1,3)|}=$$
$$=\frac{3\cdot1+1\cdot3}{\sqrt{3^2+1^2}\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$