ΑΛΓΕΒΡΑ

Α' Γενικού Λυκείου

Σάββατο 21 Απριλίου 2018 | Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **i.** $\mathbb{R}$ (το σύνολο των πραγματικών αριθμών)

ii. $3x-6\neq 0 \Leftrightarrow 3x\neq 6 \Leftrightarrow x\neq \frac{6}{3} \Leftrightarrow x\neq 2$

iii. $4x-8\geq 0 \Leftrightarrow 4x\geq 8 \Leftrightarrow x\geq \frac{8}{4} \Leftrightarrow x\geq 2$

iv. $7x+21\geq 0 \Leftrightarrow 7x\geq -21 \Leftrightarrow x\geq \frac{-21}{7} \Leftrightarrow x\geq -3$ και $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

Τελικά: $[-3,1)\cup(1,+\infty)$

Α2. **α)** $y=-x+6$

β) $A=\frac{\sqrt{(6-x)^2}}{x-6}=\frac{|6-x|}{x-6}=\frac{6-x}{x-6}=-\frac{x-6}{x-6}=-1$ (αφού $x<6$)

γ) Είναι παράλληλες (ή συμπίπτουν), γιατί έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

ΘΕΜΑ Β

B1. **i.** Λ

ii. Λ

iii. Σ

iv. Σ

v. Λ

B2. **α)** Από τη σχέση $1 < x < 3$ προκύπτει ότι $x - 1 > 0$ και $x - 3 < 0$ και $x > 0$, οπότε έχουμε στην παράσταση:

$$A = 3(x-1) - (x-4) - 2x = 3x - 3 - x + 4 - 2x = 1$$

β) $B = \left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right) = \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2^2 = 7 - 4 = 3$

γ) Έχουμε $A < x < B \Leftrightarrow 1 < x < 3$ **(1)** και $2 < y < 5$ **(2)**. Άρα:

i) Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει:

$3 < x + y < 8$

ii) $2 < y < 5 \Leftrightarrow (-1)\cdot 2 > (-1)\cdot y > (-1)\cdot 5 \Leftrightarrow -2 > -y > -5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5 < -y < -2$ **(3)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (3) προκύπτει:

$-4 < x - y < 1$

iii) $1 < x < 3 \Leftrightarrow 1^2 < x^2 < 3^2 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 9 \Leftrightarrow 2\cdot 1 < 2\cdot x^2 < 2\cdot 9 \Leftrightarrow$

$2 < 2x^2 < 18$ **(4)** και

$2 < y < 5 \Leftrightarrow 2^2 < y^2 < 5^2 \Leftrightarrow 4 < y^2 < 25$ **(5)**

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (4) και (5) προκύπτει:

$6 < 2x^2 + y^2 < 43$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **α)** Αριθμητική πρόοδος λέγεται η ακολουθία, στην οποία κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

β) 1–d ή h–i
2–h ή d–v
3–a–ix
4–i–iv
5–f–vi
6–c–vii
7–b–viii
8–e–ii
9–g–iii

Γ2. **α)** $(\alpha_2 + \alpha_4 = 60 \;\;\text{και}\;\; \alpha_3 + \alpha_5 = 180) \Leftrightarrow$

$(\alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_1 \cdot \lambda^3 = 60 \;\;\text{και}\;\; \alpha_1 \cdot \lambda^2 + \alpha_1 \cdot \lambda^4 = 180) \Leftrightarrow$

$(\alpha_1 \cdot \lambda \cdot (1 + \lambda^2) = 60 \;\;\text{και}\;\; \alpha_1 \cdot \lambda^2 \cdot (1 + \lambda^2) = 180) \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\alpha_1 \cdot \lambda \cdot (1+\lambda^2)}{\alpha_1 \cdot \lambda^2 \cdot (1+\lambda^2)} = \frac{60}{180}\right) \Leftrightarrow \lambda = 3$$

Αντικαθιστώντας το λ στην $\alpha_1 \cdot \lambda \cdot (1 + \lambda^2) = 60$ βρίσκουμε $\alpha_1 = 2$.

β) $S_5 = 2 \cdot \dfrac{3^5 - 1}{3 - 1} = 242$

Γ3. **α)** Για να είναι η ακολουθία αριθμητική πρόοδος αρκεί:

$\beta_{\nu+1} - \beta_\nu = 2(\nu+1) - 3 - (2\nu - 3) = 2\nu + 2 - 3 - 2\nu + 3 = 2$: σταθερός αριθμός

Άρα η ακολουθία (β_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 2$ και $\beta_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$.

β) Έχουμε: $x^2 - \beta_1 \cdot x + \omega = x^2 + x + 2$

Άρα $\left|x^2+x-2\right|=-x^2-x+2$

Ισχύει $|\alpha|=-\alpha \Leftrightarrow \alpha \leq 0$. Άρα πρέπει: $x^2+x-2 \leq 0$

Έχουμε Δ = 1 + 8 = 9 και

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm 3}{2}=1$ ή -2

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	−	0	+	

Τελικά το x ανήκει στο [−2, 1].

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **α)** 1–iii, 2–iv, 3–ii, 4–i

β)

- Ετερόσημο, μεταξύ των ριζών
- Μηδέν
- Ομόσημο

Δ2. **α)** $\Delta = 16 + 4\lambda^2 > 0$, άρα η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Αρκεί $S = P \Leftrightarrow \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{4}{\lambda} = \frac{-\lambda}{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = -4,\quad \lambda \neq 0$

γ) $|\lambda x - 1| \leq 7 \Leftrightarrow |-4x - 1| \leq 7 \Leftrightarrow |4x + 1| \leq 7 \Leftrightarrow$

$-7 \leq 4x + 1 \leq 7 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{3}{2}$ και

$\lambda x^2 + x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow -4x^2 + x + 3 \leq 0$

$\Delta = 1 + 48 = 49$

$x_1 = \frac{-1+7}{-8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

$x_2 = \frac{-1-7}{-8} = \frac{-8}{-8} = 1$

x	$-\infty$		$-3/4$		1		$+\infty$
$-4x^2 + x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα x ανήκει στο $(-\infty, -3/4] \cup [1, +\infty)$

Κοινές λύσεις: x ανήκει στο $[-2, -3/4] \cup [1, 3/2]$

δ) Κοινές ακέραιες λύσεις: $-2, -1, 1$.

Έχουμε για την $x^2 + \beta x + \gamma$: $S = x_1 + x_2 = -2 - 1 = -3 \Rightarrow$

$S = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -3 = \frac{-\beta}{1} \Leftrightarrow \beta = 3$ και

$P = x_1 \cdot x_2 = (-2)(-1) = 2 \Rightarrow P = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow 2 = \frac{\gamma}{1} \Leftrightarrow \gamma = 2$

Άρα το ζητούμενο τριώνυμο: $x^2 + 3x + 2$

ΘΕΜΑ Γ

Εναλλακτικό θέμα αντί για τις προόδους.

Γ1. **α)** $x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$

β) Η μεγαλύτερη ρίζα είναι η ω = 2. Οπότε έχουμε:

$$A=\frac{1}{\sqrt{\omega}-1}-\frac{1}{\sqrt{\omega}+1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)}=\frac{2}{2-1}=2$$

και

$$B=\sqrt{\sqrt[5]{\omega^9}}\cdot\sqrt[10]{\omega} = \sqrt{\sqrt[5]{2^9}}\cdot\sqrt[10]{2}=\sqrt[10]{2^9}\cdot\sqrt[10]{2}=\sqrt[10]{2^{9+1}}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$$

Άρα Α = Β = 2

Γ2. Έχουμε: $\left|x^2+x-2\right|=-x^2-x+2$

Ισχύει $|\alpha|=-\alpha \Leftrightarrow \alpha\le 0$. Άρα πρέπει: $x^2+x-2\le 0$

Έχουμε Δ = 1 + 8 = 9 και

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}=1 \text{ ή } -2$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	–	0	+	

Τελικά το x ανήκει στο [−2, 1].