

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Τετάρτη 19 Απριλίου 2017  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 186  
**A2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 141  
**A3.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 33  
**A4.**

- (α) Σωστό  
(β) Σωστό  
(γ) Λάθος  
(δ) Σωστό  
(ε) Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $A_f = \mathbb{R}$  με  $f'(x) = e^x > 0$  για κάθε πραγματικό αριθμό οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 επομένως αντιστρέφεται.

Η  $f$  συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $A_f = \mathbb{R}$  άρα:

$$f(A_f) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-1, +\infty)$$

Διότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = 0 - 1 = -1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$$

Άρα

$$f(A_f) = (-1, +\infty)$$

Το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το σύνολο τιμών της  $f$  επομένως

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

$$f(A_f) = A_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$$

Για τον τύπο της  $f^{-1}$  έχουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^x - 1 = y \Leftrightarrow e^x = y + 1 \Leftrightarrow x = \ln(y + 1)$$

Άρα

$$f^{-1}(x) = \ln(x + 1), x > -1$$

**B2.** Η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = e^x$  και  $f''(x) = e^x > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  επομένως η  $f$  κυρτή στο  $\mathbb{R}$

Η  $f^{-1}$  παραγωγίσιμη στο  $A_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$  με  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x+1}$  και

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x > -1 \text{ άρα η } f^{-1} \text{ κοίλη στο } A_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$$

Η ευθεία με εξίσωση  $y = x$  είναι ο άξονας συμμετρίας των  $C_f, C_{f^{-1}}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο  $O(0,0)$  είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot x \Leftrightarrow y = x$$

Εφόσον  $f(0) = e^0 = 1$  και  $f'(0) = e^0 = 1$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $f^{-1}$  στο  $O(0,0)$  είναι:

$$y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Εφόσον  $f^{-1}(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$  και  $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των  $f, f^{-1}$  έχουν κοινή εφαπτομένη στο  $O(0,0)$  την ευθεία  $y = x$

**B3. (i)** Επειδή η  $f$  κυρτή στο  $\mathbb{R}$  τότε η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο βρίσκεται <<πάνω>> από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Οπότε:  $f(x) \geq x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = 0$

όμως η  $f^{-1}$  είναι κοίλη στο  $(-1, +\infty)$  άρα η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο βρίσκεται <<κάτω>> από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Οπότε:  $f^{-1}(x) \leq x$  για κάθε  $x \in (-1, +\infty)$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = 0$

Οπότε για κάθε  $x \in A_f \cap A_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$  ισχύει:  $f(x) \geq f^{-1}(x)$

**(ii)** Η εξίσωση για κάθε  $x > 0$  γράφεται:

$$f(x) + f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) + \eta\mu x \Leftrightarrow f(x) + x = f^{-1}(x) + \eta\mu x \quad (1)$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

Δείξουμε στο **B3(i)** ότι  $f(x) \geq f^{-1}(x)$  για κάθε  $x \geq -1$  και το ίσον ισχύει μόνο για  $x = 0$  οπότε για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$f(x) > f^{-1}(x) \quad (2)$$

Επίσης:  $|\eta\mu x| < |x|$  για κάθε  $x \neq 0$  άρα για  $x > 0$  γίνεται:

$$|\eta\mu x| < x \Leftrightarrow -x < \eta\mu x < x$$

$$\text{Άρα } x > \eta\mu x \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2), (3) παίρνουμε:

$$f(x) + x > f^{-1}(x) + \eta\mu x \text{ για κάθε } x > 0$$

Επομένως η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο  $(0, +\infty)$

**B4.** Εφόσον η  $G$  μια παράγουσα της  $g$  στο διάστημα  $\Delta = (0, +\infty)$  τότε ισχύει:

$$G'(x) = g(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Η  $G$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο  $[\alpha, \beta]$  επομένως υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο ώστε:

$$G'(\xi) = \frac{G(\beta) - G(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad (4)$$

Επομένως:  $G'(x) = g(x) \Leftrightarrow G'(x) = f(x) + f^{-1}(x) \Leftrightarrow G'(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$

Η  $G'$  παραγωγίσιμη στο  $\Delta = (0, +\infty)$  με:

$$G''(x) = e^x + \frac{1}{x+1} > 0 \text{ για κάθε } x \in \Delta \text{ δηλαδή η } G' \text{ γνησίως αύξουσα στο } \Delta$$

Επομένως:

$$\alpha < \xi < \beta \Rightarrow G'(\alpha) < G'(\xi) < G'(\beta) \stackrel{(4)}{\Rightarrow} g(\alpha) < \frac{G(\beta) - G(\alpha)}{\beta - \alpha} < g(\beta)$$

$$\Rightarrow g(\alpha)(\beta - \alpha) < G(\beta) - G(\alpha) < g(\beta)(\beta - \alpha)$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Εφόσον η  $f$  σε εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της παρουσιάζει ακρότατο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό τότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$$f'(2) = 0 \Leftrightarrow k - \frac{2}{2^2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1$$

Για  $k = 1$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Άρα για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  έχουμε

$$f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x + c$$

Όμως

$$f(2) = 1 - \ln 2 \Leftrightarrow 2 + 1 - \ln 2 + c = 1 - \ln 2 \Leftrightarrow c = -2$$

Επομένως  $f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x - 2$

**Γ2.** Η εξίσωση  $x^2 + 2 = x(\alpha + \ln x + 2)$  για  $x > 0$  γίνεται

$$x + \frac{2}{x} = \alpha + \ln x + 2 \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} - \ln x - 2 = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha$$

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της  $f$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2}$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} < 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

Το πρόσημο της  $f'$  και η μονοτονία της  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

$x$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		○	
$f$		↘	↗

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

Στο διάστημα  $(0, 2]$  η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα ενώ στο διάστημα  $[2, +\infty)$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Για  $x = 2$  παρουσιάζει ελάχιστο με τιμή  $f(2) = 1 - \ln 2$

Η  $f$  συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $A_1 = (0, 2]$

άρα

$$f(A_1) = \left[ f(2), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 2, +\infty)$$

διότι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x + \frac{2}{x} - \ln x - 2 \right) = +\infty$$

εφόσον  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2) = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$   $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Η  $f$  συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $A_2 = [2, +\infty)$  άρα

$$f(A_2) = \left[ f(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [1 - \ln 2, +\infty)$$

διότι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{2}{x} - \ln x - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} \right) \right] = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

εφόσον  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} \right) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Επομένως

$$f(A) = [1 - \ln 2, +\infty)$$

Για την εξίσωση  $f(x) = \alpha$  έχουμε:

- Αν  $\alpha < 1 - \ln 2$  τότε η εξίσωση  $f(x) = \alpha$  είναι αδύνατη εφόσον  $\alpha \notin f(A)$
- Αν  $\alpha > 1 - \ln 2$  τότε:

$\alpha \in f(A_1)$  οπότε υπάρχει  $x_1 \in (0, 2)$  τέτοιο ώστε  $f(x_1) = \alpha$  το  $x_1$  μοναδικό διότι η  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $A_1$  και  $\alpha \in f(A_2)$  οπότε υπάρχει  $x_2 \in (2, +\infty)$  τέτοιο ώστε  $f(x_2) = \alpha$  το  $x_2$  μοναδικό διότι η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $A_2$

Επομένως η εξίσωση  $f(x) = \alpha$  έχει δύο ακριβώς ρίζες

- Αν  $\alpha = 1 - \ln 2$  τότε η εξίσωση  $f(x) = 1 - \ln 2$  έχει μοναδική ρίζα την  $x = 2$  διότι στο  $x_0 = 2$  η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο.

Γ3.

(i)  $f''(x) = \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2} > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  επομένως η  $f'$  κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $M(1, f(1))$  είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 3$$

(ii) Η δοσμένη ανίσωση για  $x > 0$  γίνεται:

$$e^{3x^2 - 5x + 2} > x^x \Leftrightarrow \ln(e^{3x^2 - 5x + 2}) > \ln x^x \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 > x \ln x \Leftrightarrow 3x - 5 + \frac{2}{x} > \ln x$$

$$\Leftrightarrow 2x + x - 2 - 3 + \frac{2}{x} > \ln x \Leftrightarrow x - 2 + \frac{2}{x} - \ln x > -2x + 3 \Leftrightarrow f(x) > -2x + 3$$

Εφόσον η  $f$  κυρτή στο  $A = (0, +\infty)$  η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε κάθε σημείο του  $A$  βρίσκεται << κάτω >> από την γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή ισχύει  $f(x) \geq -2x + 3$  για κάθε  $x > 0$  και η ισότητα ισχύει μόνο για  $x = 1$  επομένως:

Η ανίσωση  $f(x) > -2x + 3$  αληθεύει για κάθε  $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Γ4. Ο τύπος της συνάρτησης  $g$  είναι:

$$g(x) = f(x) + \ln x + 2 \Leftrightarrow g(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x - 2 + \ln x + 2 \Leftrightarrow g(x) = x + \frac{2}{x}, x > 0$$

Έστω  $y = \lambda x + \beta$  η πλάγια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $+\infty$  τότε:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x^2} \right) = 1$$

και

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Οπότε η  $y = x$  είναι η πλάγια ασύμπτωτη της  $f$  στο  $+\infty$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^e |g(x) - x| dx = \int_1^e \left| \frac{2}{x} \right| dx = \int_1^e \frac{2}{x} dx = [2 \ln x]_1^e = 2 \ln e - 2 \ln 1 = 2\tau.\mu$$

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Παραγωγίζοντας τη σχέση:  $f(f^2(x)) + f^2(x) = f(x) + x$  έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(f^2(x)) \cdot 2f(x)f'(x) + 2f(x)f'(x) &= f'(x) + 1 \\ \Leftrightarrow f'(f^2(x)) \cdot 2f(x)f'(x) + 2f(x)f'(x) - f'(x) &= 1 \\ \Leftrightarrow f'(x)(f'(f^2(x)) \cdot 2f(x) + 2f(x) - 1) &= 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι  $f'(x) \neq 0$  για κάθε  $x > 0$  και επειδή η  $f'$  είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στο  $(0, +\infty)$

Για  $x = 1$  η σχέση (1) γίνεται:

$$f'(1)(f'(f^2(1)) \cdot 2f(1) + 2f(1) - 1) = 1 \Leftrightarrow f'(1)(2f'(1) + 1) = 1 \Leftrightarrow 2(f'(1))^2 + f'(1) - 1 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις το  $-1$  και το  $\frac{1}{2}$ , όμως  $f'(1) \neq -1$  άρα  $f'(1) = \frac{1}{2}$

Η  $f'$  διατηρεί πρόσημο στο  $A = (0, +\infty)$  και  $f'(1) = \frac{1}{2} > 0$

Άρα:  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  επομένως η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Δ2. Για το ολοκλήρωμα  $\int_2^3 f(t-1)dx$  θέτουμε  $u = t-1$  οπότε  $du = dt$  και για  $t = 2$

έχουμε  $u = 1$  ενώ για  $t = 3$  έχουμε  $u = 2$  άρα:  $\int_2^3 f(t-1)dx = \int_1^2 f(u)du$  άρα η  $g$  γίνεται:

$$g(x) = \begin{cases} \left( \int_1^2 f(t)dt \right) \cdot x^3, & x \geq 0 \\ \left( \int_1^2 f(t)dt \right) \cdot x^2, & x < 0 \end{cases}$$

και θέτοντας για λόγους απλότητας  $\int_1^2 f(t)dt = k$  γίνεται:

$$g(x) = \begin{cases} k \cdot x^3, & x \geq 0 \\ k \cdot x^2, & x < 0 \end{cases}$$

- $g(-1) = k \cdot (-1)^2 = k$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
**Β' ΦΑΣΗ**

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

- $g(1) = k \cdot 1^3 = k$

Οπότε:  $g(-1) = g(1)$

Η  $g$  παραγωγίσιμη στο  $(-\infty, 0)$  με  $g'(x) = 2kx$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $g'(x) = 3kx^2$ .

Για το  $x_0 = 0$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{kx^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} kx = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{kx^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} kx^2 = 0$$

Άρα η  $g$  παραγωγίσιμη και στο μηδέν με  $g'(0) = 0$  επομένως θα είναι και συνεχής στο  $x_0 = 0$

Επομένως για τη συνάρτηση  $g$  ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[-1, 1]$  εφόσον είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$  παραγωγίσιμη στο  $(-1, 1)$  και  $g(-1) = g(1)$

**Δ3.** Η συνάρτηση  $h(x) = f(x^2 + 1), x > 0$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $A = (0, +\infty)$  διότι:

$$h'(x) = f'(x^2 + 1) \cdot 2x > 0, \text{ για κάθε } x > 0$$

**A-τρόπος**

Για το ολοκλήρωμα  $\int_1^2 h(x) dx$  θέτουμε  $x = u - 1$  οπότε  $du = dx$  και για  $x = 1$

έχουμε  $u = 2$  ενώ για  $x = 2$  έχουμε  $u = 3$  άρα:  $\int_1^2 h(x) dx = \int_2^3 h(u - 1) du$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι:  $\int_2^3 h(x) dx > \int_2^3 h(x - 1) dx$

Για κάθε  $x > 0$  ισχύει:  $x - 1 < x \Rightarrow h(x - 1) < h(x) \Rightarrow \int_2^3 h(x - 1) dx < \int_2^3 h(x) dx$

**B-τρόπος**

Αν  $F$  παράγουσα της  $h(x) = f(x^2 + 1)$  τότε η (2) γίνεται

$$\int_2^3 h(x) dx > \int_1^2 h(x) dx \Leftrightarrow F(3) - F(2) > F(2) - F(1)$$

Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ στα  $[1, 2], [2, 3]$



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2017**  
 Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ3ΘΟ(α)**

υπάρχουν  $x_1 \in (1,2)$ ,  $x_2 \in (2,3)$  ώστε

$$F'(x_1) = \frac{F(2) - F(1)}{2 - 1} \Leftrightarrow F'(x_1) = F(2) - F(1)$$

$$F'(x_2) = \frac{F(3) - F(2)}{3 - 2} \Leftrightarrow F'(x_2) = F(3) - F(2)$$

$$x_1 < x_2 \stackrel{F'=h!}{\Rightarrow} F'(x_1) < F'(x_2) \Leftrightarrow F(2) - F(1) < F(3) - F(2)$$

**Δ4.** Η εξίσωση

$$\left( \int_2^3 h(t) \cdot \int_2^3 h(u) du \right) dt \cdot (x-2) + f(x) \left( \int_1^2 h(t) dt \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_2^3 h(u) du \cdot \int_2^3 h(t) dt \cdot (x-2) + f(x) \left( \int_1^2 h(t) dt \right)^2 = 0$$

Θέτουμε:  $\int_2^3 h(t) dt = \int_2^3 h(u) du = \alpha$  και  $\int_1^2 h(t) dt = \beta$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$\alpha^2 (x-2) + f(x) \cdot \beta^2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = \alpha^2 (x-2) + f(x) \cdot \beta^2, x \in [1,2]$$

Η  $\varphi$  συνεχής στο  $[1, 2]$  ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\varphi(1) = \alpha^2 (1-2) + f(1) \cdot \beta^2 \Leftrightarrow g(1) = -\alpha^2 + \beta^2 = (\beta - \alpha) \cdot (\beta + \alpha) < 0$$

Διότι: από το Δ3 ισχύει  $\beta < \alpha \Leftrightarrow \int_1^2 h(t) dt < \int_2^3 h(t) dt$  και λόγω μονοτονίας

$h(x) \geq h(1) > 0$  άρα  $\alpha > 0, \beta > 0$

$$\varphi(2) = \alpha^2 (2-2) + f(2) \cdot \beta^2 \Leftrightarrow g(2) = f(2) \cdot \beta^2 > 0$$

Διότι:  $2 > 1 \stackrel{f'}{\Rightarrow} f(2) > f(1) \Rightarrow f(2) > 1$  και  $\beta^2 = \left( \int_1^2 h(t) dt \right)^2 > 0$

Επομένως  $\varphi(1) \cdot \varphi(2) < 0$  άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1,2)$

Η  $\varphi$  παραγωγίσιμη στο  $A_\varphi = (0, +\infty)$  με  $\varphi'(x) = \alpha^2 + \beta^2 f'(x) > 0$  για κάθε  $x > 0$  επομένως η  $\varphi$  γνησίως αύξουσα στο  $A_\varphi = (0, +\infty)$  οπότε η ρίζα είναι μοναδική.