

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β΄ ΦΑΣΗ

E_3.Γλ1(α)

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

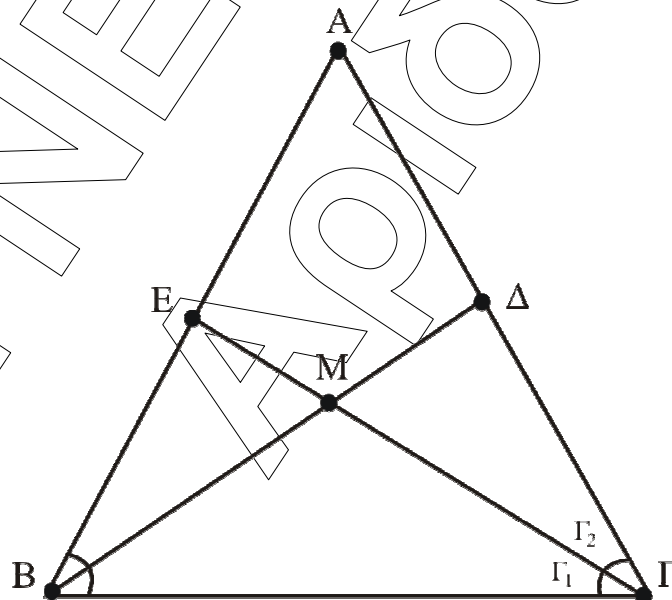
Ημερομηνία: Τετάρτη 15 Απριλίου 2015
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 62, Θεώρημα ΙΙ.
A2. Βλέπε ορισμό σχολικού βιβλίου σελίδα 113.
A3. α.→Λ, β.→Λ, γ.→Σ, δ.→Λ, ε.→Σ

ΘΕΜΑ Β



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β΄ ΦΑΣΗ

E_3.Γλ1(α)

B1. Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ισχύει:

$$\hat{B} = \hat{\Gamma} \text{ (1)}. \text{ Επίσης } \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\hat{B}}{2} \text{ και } \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

$$\text{Άρα } \hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}_1.$$

Οπότε $M\Gamma = MB$ και έτσι το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές.

B2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα BME και $\Gamma M\Delta$. Αυτά έχουν:

$$MB = M\Gamma \text{ (λόγω B1.)}$$

$$\hat{BME} = \hat{\Gamma M\Delta} \text{ (ως κατακορυφή)}$$

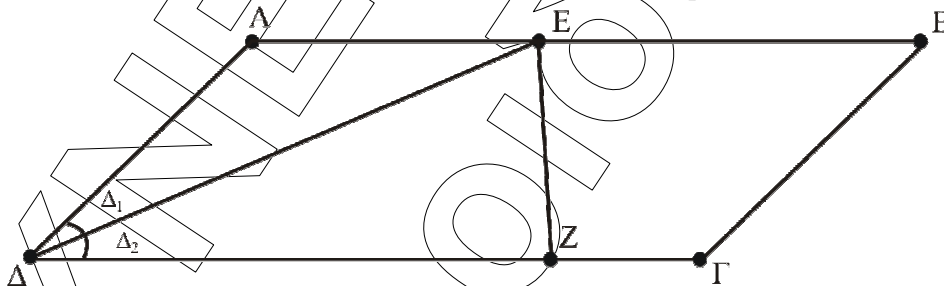
$$\hat{B}_2 = \hat{\Gamma}_2$$

Από το κριτήριο $\Gamma-\Pi-\Gamma$ τα τρίγωνα είναι ίσα. Οπότε και τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία τους είναι ίσα. Άρα $ME = M\Delta$ και $BE = \Gamma\Delta$ (2). Ομως $AB = A\Gamma$ (3).

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3) και (2) έχουμε

$$AB - BE = A\Gamma - \Gamma\Delta \Leftrightarrow AE = A\Delta.$$

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Γνωρίζουμε από υπόθεση ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = \frac{\hat{\Delta}}{2}$. (1)

Επίσης ισχύει $\hat{\Delta}_2 = \hat{A\hat{E}\Delta}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων AB και $\Gamma\Delta$ με τέμνουσα τη ΔE). (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{A\hat{E}\Delta}$.

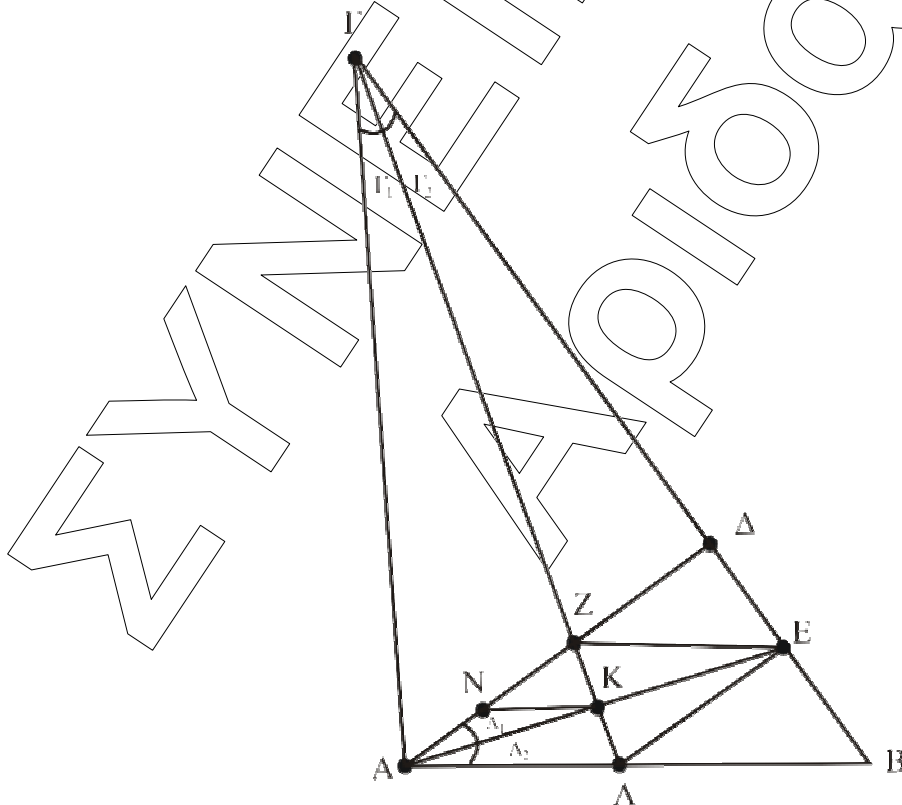
Άρα $A\Delta = AE$, οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Γλ1(α)

- Γ2.** Από το ερώτημα Γ1 ισχύει $ΑΔ = ΑΕ$.
 Στο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ ισχύει ότι $ΑΔ = ΒΓ$.
 Άρα $ΑΕ = ΒΓ$.
 Όμως το $Ε$ είναι μέσο της $ΑΒ$ οπότε ισχύει $ΑΕ = \frac{ΑΒ}{2}$.
 Εντέλει $ΒΓ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΑΒ = 2ΒΓ$.
- Γ3.** Στο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ ισχύει: $\hat{Α} + \hat{Δ} = 180^\circ$
 Όμως $\hat{Α} = 2\hat{Δ} \Leftrightarrow 3\hat{Δ} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{Δ} = 60^\circ$. Άρα $\hat{Δ}_2 = \frac{\hat{Δ}}{2} = 30^\circ$.
 Έτσι στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΔΕΖ$ ισχύει ότι $ΕΖ = \frac{ΔΕ}{2} \Leftrightarrow ΔΕ = 2ΕΖ$.

ΘΕΜΑ Δ



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2015
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Γλ1(α)

Δ1.

- Γνωρίζουμε από υπόθεση ότι: $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\Delta\hat{A}B}{2}$ (2)

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B}$ (3).

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει: $\Delta\hat{A}B = 90^\circ - \hat{B}$ (4).

Από τις σχέσεις (1),(2),(3),(4) έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ (5).

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΖΔ ισχύει:

$$\hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta = 90^\circ - \hat{\Gamma}_2 = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Όμως $\hat{\Gamma}\hat{Z}\Delta = \hat{A}\hat{Z}K$ (ως κατακορυφήν).

$$\text{Άρα } \hat{A}\hat{Z}K = 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2}.$$

Έτσι στο τρίγωνο ΑΖΚ ισχύει: $\hat{A}_1 + \hat{A}\hat{Z}K = \frac{\hat{\Gamma}}{2} + 90^\circ - \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ$

Οπότε $\hat{A}\hat{K}Z = 90^\circ$. Ωστε $\Gamma K \perp A E$.

Δ2. Στο τρίγωνο ΑΓΕ ισχύει ότι τα ΑΚ, ΑΔ είναι ύψη του. Οπότε το σημείο Ζ είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου. Έτσι η ΕΖ είναι ο φορέας του τρίτου ύψους του. Άρα $EZ \perp A\Gamma$. Όμως $AB \perp A\Gamma$ και έτσι $EZ \parallel AB$.

Δ3. Εφόσον η ΓΚ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΓΕ, το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές και έτσι η ΓΚ είναι διάμεσος. Άρα το Κ είναι μέσο της ΑΕ. Ομοίως η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος του τριγώνου ΑΖΛ. Οπότε το τρίγωνο ΑΖΛ είναι ισοσκελές.

Έτσι το Κ είναι μέσο της ΖΛ.

Άρα οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΖΕΛΑ διχοτομούνται και λόγω του ερωτήματος Δ1 είναι κάθετες.

Ωστε το τετράπλευρο ΖΕΛΑ είναι ρόμβος.

Δ4. Στο τρίγωνο ΑΖΛ το Κ είναι το μέσο της ΖΛ και ισχύει $KN \parallel AL$.

$$\text{Άρα το Ν είναι μέσο της ΑΖ. Έτσι } KN = \frac{AL}{2} = \frac{EL}{2}.$$

Εναλλακτικά στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΖ, η ΚΝ είναι διάμεσος.

$$\text{Οπότε } KN = \frac{AZ}{2} = \frac{EL}{2}.$$