

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:** ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

A1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 224.

A2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 280.

A3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 169.

- A4. i. Σωστό  
 ii. Σωστό  
 iii. Σωστό  
 iv. Λάθος  
 v. Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

B1. Είναι  $z_1$  φανταστικός, εάν και μόνο αν  $\text{Re}(z_1) = 0$  (1)

α) Φέρνουμε τον  $z_1$  στην μορφή  $\kappa + \lambda i$ ,  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{(1 + \beta i - 2i) \cdot (\alpha + 2 + i)}{(\alpha + 2 - i) \cdot (\alpha + 2 + i)} \\ &= \frac{\alpha + 2 + i + \alpha\beta i + 2\beta i - \beta - 2\alpha i - 4i + 2}{(\alpha + 2)^2 + 1} \\ &= \frac{\alpha - \beta + 4}{(\alpha + 2)^2 + 1} + \frac{\alpha\beta + 2\beta - 2\alpha - 3}{(\alpha + 2)^2 + 1} i \end{aligned}$$

Από την σχέση (1) προκύπτει  $\frac{\alpha - \beta + 4}{(\alpha + 2)^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta + 4 = 0$ .

Η τελευταία εξίσωση επαληθεύεται από όλα τα σημεία  $M(x, y)$  του μιγαδικού επιπέδου τα οποία είναι εικόνες του  $z = a + bi$  και μόνο αυτά. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$  είναι η ευθεία  $x - y + 4 = 0$ .

β) Έστω  $w = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Είναι } w - \frac{1}{2}i = x + \left(y - \frac{1}{2}\right)i$$

$$\text{Επομένως, } \text{Im}\left(w - \frac{1}{2}i\right) = y - \frac{1}{2}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \left| (1-i) \text{Im}\left(w - \frac{1}{2}i\right) \right| &= \sqrt{2} \left| w - \frac{1}{2}i \right| \Leftrightarrow \left| (1-i) \left(y - \frac{1}{2}\right) \right| = \sqrt{2} \left| x + yi + \frac{1}{2}i \right| \\ &\Leftrightarrow |1-i| \left| y - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{2} \left| x + \left(y + \frac{1}{2}\right)i \right| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} \left| y - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{2} \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow \left| y - \frac{1}{2} \right|^2 = \left( \sqrt{x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4}} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow y^2 - y + \frac{1}{4} = x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2y = 0 \end{aligned}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $w$  είναι η γραμμή με εξίσωση  $x^2 + 2y = 0$ , η οποία είναι παραβολή, αφού  $\Leftrightarrow x^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2$

**B2.** Το  $|z-w|$  ισούται με την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών  $z$  και  $w$ , επομένως εκφράζει την απόσταση των σημείων της ευθείας  $(\varepsilon): x - y + 4 = 0$  από τα σημεία της παραβολής  $C: y = -\frac{1}{2}x^2$ .

Έστω  $M(x_0, y_0)$  τυχαίο σημείο της παραβολής, και  $N$  τυχαίο σημείο της ευθείας. Σύμφωνα με τα παραπάνω πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι  $MN \geq \frac{7\sqrt{2}}{4}$ . Θεωρούμε την προβολή  $M_0$  του  $M$  στην ευθεία. Προφανώς

$MN \geq MM_0$ . Επειδή  $y_0 = -\frac{1}{2}x_0^2$  είναι  $M\left(x_0, -\frac{1}{2}x_0^2\right)$  η απόσταση του  $M$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι:

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014**

**E\_3.Μλ3ΘΤ(α)**

$$MM_0 = d(M, \varepsilon) = \frac{\left| x_0 + \frac{1}{2}x_0^2 + 4 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|x_0^2 + 2x_0 + 8|}{2\sqrt{2}} \quad (1)$$

επομένως

$$MM_0 = \frac{|(x_0 + 1)^2 + 7|}{2\sqrt{2}} = \frac{(x_0 + 1)^2 + 7}{2\sqrt{2}} \geq \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

Συνεπώς  $MN \geq MM_0 \geq \frac{7\sqrt{2}}{4}$ , που αποδεικνύει το ζητούμενο.

**2ος τρόπος** εύρεσης του ελαχίστου από την (1).

Έστω  $f(x) = x^2 + 2x + 8$ ,  $A_f = \mathbb{R}$ . Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική με  $f'(x) = 2x + 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1, \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$$

Άρα για  $x = -1$ , η  $f$  έχει ελάχιστο το  $f(-1) = 7$ , οπότε  $x_0^2 + 2x_0 + 8 \geq 7$  και από την (1)

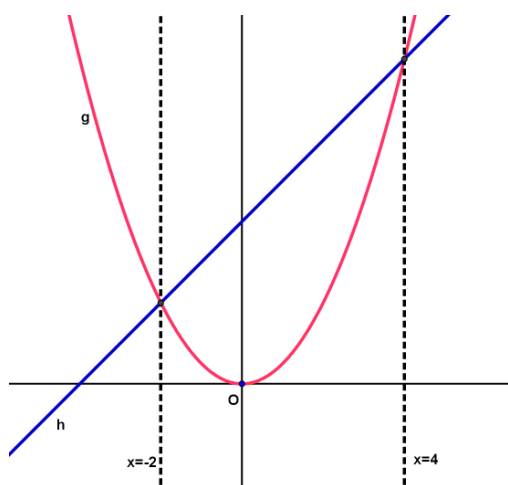
$$MM_0 = d(M, \varepsilon) \geq \frac{7}{2\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$

**B3. α)** Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά, ως προς τον άξονα  $x'x$ . Εφόσον οι εικόνες του  $w$  είναι τα σημεία  $\left(x, -\frac{1}{2}x^2\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , οι εικόνες του  $\bar{w}$ , είναι τα  $\left(x, \frac{1}{2}x^2\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , που έχουν γεωμετρικό τόπο την παραβολή  $C: y = \frac{1}{2}x^2$ , αφού αυτά και μόνο αυτά την επαληθεύουν.

**β)** Έστω  $g(x) = \frac{1}{2}x^2$  και  $h(x) = x + 4$ . Αρχικά βρίσκουμε τις ρίζες και το πρόσημο της διαφοράς  $g(x) - h(x)$ . Είναι

$$g(x) - h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$4$	$+\infty$
$g(x) - h(x)$	$+$	$\ominus$	$\ominus$	$+$



Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-2}^4 |g(x) - h(x)| dx = \int_{-2}^4 [h(x) - g(x)] dx \\
 &= \int_{-2}^4 \left( x + 4 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\
 &= \left[ \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{6} \right]_{-2}^4 = 18 \text{ τμ.}
 \end{aligned}$$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Είναι

$$\begin{aligned}
 f'(x) - f(x) = e^x g'(x) - 1 &\Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} e^x g'(x) - e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = g'(x) - e^{-x} \\
 &\Leftrightarrow [f(x) e^{-x}]' = [g(x) + e^{-x}]' \\
 &\Leftrightarrow f(x) e^{-x} = g(x) + e^{-x} + c, \quad (1) \text{ με } c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου  $x = 1$ , έχουμε

$$f(1)e^{-1} = g(1) + e^{-1} + c \Leftrightarrow e^{-1} = e^{-1} + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως η (1) δίνει  $f(x) = e^x g(x) + 1, x \in \mathbb{R}$ .

**Γ2. α)** Από την σχέση  $f'(x) - f(x) = e^x g'(x) - 1$ , για  $x = 1$  έχουμε

$$f'(1) - f(1) = e g'(1) - 1 \Leftrightarrow f'(1) = e g'(1), \quad (2)$$

Ακόμα

$$2f(x) + x^2 - 2x \geq 1 \Leftrightarrow 2f(x) + x^2 - 2x - 1 \geq 0 \quad (3) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν θεωρήσουμε  $2f(x) + x^2 - 2x - 1 = \varphi(x)$ , τότε επειδή

$$2f(1) + 1 - 2 - 1 = \varphi(1) \Leftrightarrow \varphi(1) = 0,$$

η (3) γράφεται  $\varphi(x) \geq \varphi(1)$ . Συνεπώς η  $\varphi(x)$  παρουσιάζει για  $x = 1$  (ολικό) ελάχιστο. Ακόμη η  $\varphi(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με:

$$\varphi'(x) = 2f'(x) + (x^2 - 2x - 1)' \Leftrightarrow \varphi'(x) = 2f'(x) + 2x - 2.$$

Για την  $\varphi(x)$  ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Fermat, άρα  $\varphi'(1) = 0$ , ή ισοδύναμα

$$2f'(1) + 2 - 2 = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$$

Επομένως από την (2) έχουμε:  $eg'(1) = 0 \Leftrightarrow g'(1) = 0$ .

β) Έστω  $x > 0$ . Θέτουμε  $\frac{x+2}{x+1} = t$ , οπότε

$$\frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = t \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = t-1 \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{t-1}$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} = 1$ , το  $t$  τείνει στο 1. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+1)g\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{t-1}g(t) \right] = \lim_{t \rightarrow 1} \left[ \frac{g(t)-g(1)}{t-1} \right] = g'(1) = 0$$

Γ3. α) Είναι  $f(x) = e^x g(x) + 1$  και  $g(x) = (x-1)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε:

$$f(x) = e^x (x-1)^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$f'(x) = \left[ e^x (x-1)^2 + 1 \right]' = e^x (x-1)^2 + 2e^x (x-1) = e^x (x-1)(x+1)$$

Ο πίνακας με τις ρίζες και το πρόσημο της  $f'(x)$ , τη μονοτονία και τα ακρότατα της  $f$  είναι:

<b>x</b>	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
<b>f'(x)</b>	+	0	-	0	+
<b>f(x)</b>		$\frac{4}{e} + 1$		1	

Η  $f$  είναι συνεχής στα διαστήματα  $(-\infty, -1]$ ,  $[-1, 1]$ ,  $[1, +\infty)$  και  $f'(x) > 0$  για  $x < -1$ ,  $f'(x) < 0$  για  $-1 < x < 1$ ,  $f'(x) > 0$  για  $x > 1$ .

Άρα η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -1]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ .

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ e^x (x-1)^2 + 1 \right] = 0 + 1 = 1,$$

αφού

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x (x-1)^2] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^2}{e^{-x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[(x-1)^2]'}{(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x-1)}{-e^{-x}} \\ &\stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x-1)'}{-(e^{-x})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \end{aligned}$$

Ακόμη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x (x-1)^2 + 1] = +\infty,$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Επομένως η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για  $x = -1$  το  $f(-1) = \frac{4}{e} + 1$  και

ολικό ελάχιστο για  $x = 1$  το  $f(1) = 1$ . Αν

$$A_1 = (-\infty, -1), \quad A_2 = [-1, 1] \text{ και } A_3 = (1, +\infty),$$

τότε

$$f(A_1) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \frac{4}{e} + 1 \right) = \left( 1, \frac{4}{e} + 1 \right),$$

$$f(A_2) = [f(1), f(-1)] = \left[ 1, \frac{4}{e} + 1 \right] \text{ και}$$

$$f(A_3) = \left( 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1, +\infty).$$

Επομένως το σύνολο τιμών της  $f$  είναι το

$$f(\mathbb{R}) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3) = [1, +\infty)$$

β) Η  $h(x) = e^x(1-x) + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$h'(x) = [e^x(1-x) + 1]' = e^x(1-x) - e^x = -xe^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Έστω  $\varepsilon$  η εφαπτομένη που φέρουμε στη  $C_h$  από το σημείο  $M(1, \lambda)$  και  $(x_0, h(x_0))$  το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0),$$

η οποία γράφεται

$$y - e^{x_0}(1-x_0) - 1 = -x_0 e^{x_0}(x - x_0)$$

Επειδή το  $M(1, \lambda)$  είναι σημείο της εφαπτομένης, για  $x = 1$  και  $y = \lambda$  η τελευταία σχέση δίνει

$$\begin{aligned} \lambda - e^{x_0}(1-x_0) - 1 &= -x_0 e^{x_0}(1-x_0) \Leftrightarrow \lambda = 1 + e^{x_0}(1-x_0 - x_0 + x_0^2) \\ &\Leftrightarrow e^{x_0}(x_0 - 1)^2 + 1 = \lambda \\ &\Leftrightarrow f(x_0) = \lambda \end{aligned}$$

Όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, η  $f$  είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα  $A_1, A_2, A_3$ , οπότε η εξίσωση  $f(x) = \lambda$ , έχει το πολύ μία λύση σε καθένα από αυτά και, συνεπώς, συνολικά έχει το πολύ τρεις λύσεις στο  $\mathbb{R}$ . Αυτό αποδεικνύει, ότι από το σημείο  $M(1, \lambda)$  άγονται το πολύ τρεις εφαπτόμενες στη  $C_f$ .

**2ος τρόπος απόδειξης,** ότι η εξίσωση  $f(x) = \lambda$  έχει το πολύ τρεις ρίζες. Υποθέτουμε ότι έχει τέσσερις διαφορετικές ρίζες τις  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$  και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$ . Αυτές είναι ρίζες και της συνάρτησης

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda$$

Η  $\varphi$  είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα  $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3], [\rho_3, \rho_4]$  και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα  $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), (\rho_3, \rho_4)$  με  $\varphi'(x) = f'(x)$  και ακόμα

$$\varphi(\rho_1) = \varphi(\rho_2) = \varphi(\rho_3) = \varphi(\rho_4) = 0$$

Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle σε καθένα από τα διαστήματα  $(\rho_1, \rho_2), (\rho_2, \rho_3), (\rho_3, \rho_4)$ , οπότε υπάρχουν  $\kappa_1 \in (\rho_1, \rho_2), \kappa_2 \in (\rho_2, \rho_3), \kappa_3 \in (\rho_3, \rho_4)$  τέτοια, ώστε

$$\varphi'(\kappa_1) = \varphi'(\kappa_2) = \varphi'(\kappa_3) = 0$$

Προφανώς  $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$ . Επειδή  $\varphi(x) = f(x)$  προκύπτει ότι η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει τρεις διαφορετικές ρίζες, τις  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ , που είναι άτοπο, διότι, όπως αποδείχτηκε στο προηγούμενο ερώτημα, έχει δύο ακριβώς δύο ρίζες τις  $x = 1, x = -1$ .

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Θεωρούμε την συνάρτηση  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$h(x) = \int_0^x 2t^2 e^{t^2} dt - x e^{x^2} + x$$

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο

$$h'(x) = 2x^2 e^{x^2} - (e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}) + 1 = 1 - e^{x^2}$$

Η  $h'$  μηδενίζεται για  $x = 0$  και για κάθε  $x \neq 0$  είναι

$$x^2 > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > 1 \Leftrightarrow 1 - e^{x^2} < 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$$

Επομένως, η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε έχουμε:

$$h(x) < 0 \Leftrightarrow h(x) < h(0) \Leftrightarrow x > 0 \quad (1)$$

Η πρώτη από τις δοσμένες ανισότητες για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  δίνει:

$$\int_0^{g''(x)} 2t^2 e^{t^2} dt - g''(x) e^{[g''(x)]^2} + g''(x) < 0$$

ή  $h(g''(x)) < 0$  και λόγω της (1):  $g''(x) > 0$ , που σημαίνει ότι η  $g'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_0^{g''(x)} 2t^2 e^{t^2} dt < g''(x) e^{[g''(x)]^2} - g''(x) \\ \Leftrightarrow & \int_0^{g''(x)} t(e^{t^2})' dt < g''(x) e^{[g''(x)]^2} - g''(x) \\ \Leftrightarrow & \left[ t e^{t^2} \right]_0^{g''(x)} - \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt < g''(x) e^{[g''(x)]^2} - g''(x) \\ \Leftrightarrow & g''(x) e^{[g''(x)]^2} - \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt < g''(x) e^{[g''(x)]^2} - g''(x) \\ \Leftrightarrow & \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt > g''(x) \end{aligned} \quad (1^*)$$

Και τώρα συνεχίζουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} (1^*) \Leftrightarrow & \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt < \int_0^{g''(x)} dt \\ \Leftrightarrow & \int_0^{g''(x)} e^{t^2} dt - \int_0^{g''(x)} dt > 0 \\ \Leftrightarrow & \int_0^{g''(x)} (e^{t^2} - 1) dt > 0 \end{aligned} \quad (2^*)$$

Επειδή  $e^{t^2} - 1 \geq 0$ , για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ , η (2\*) αποκλείει  $g''(x) \leq 0$ , αφού τότε θα είχαμε  $\int_0^{g''(x)} (e^{t^2} - 1) dt \geq 0 \Leftrightarrow \int_0^{g''(x)} (e^{t^2} - 1) dt \leq 0$ , άτοπο. Επομένως  $g''(x) > 0$ , που σημαίνει ότι η  $g'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

### Δ2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f$ με

$$f(x) = \int_{-2}^{g(x)} e^{t^2} dt, \quad x \in [0, 1]$$



Η  $f$  είναι συνεχής, ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων  $g$  και  $g_1$  με

$$g_1(x) = \int_{-2}^x e^{t^2} dt. \text{ Ακόμα}$$

$$f(0)f(1) = \int_{-2}^{g(0)} e^{t^2} dt \int_{-2}^{g(1)} e^{t^2} dt < 0$$

Επομένως, από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει  $\rho \in (0, 1)$  τέτοιο ώστε  $f(\rho) = 0$  ή

$$\int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2} dt = 0 \quad (2)$$

- Αν  $g(\rho) > -2$ , επειδή  $e^{t^2} > 0$  θα είναι  $\int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2} dt > 0$  άτοπο από την (2).
- Αν  $g(\rho) < -2$  επειδή  $e^{t^2} > 0$  θα είναι  $\int_{g(\rho)}^{-2} e^{t^2} dt > 0 \Leftrightarrow \int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2} dt < 0$ , ομοίως άτοπο από την (2).

Επομένως  $g(\rho) = -2$ .

Στη συνέχεια, εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την  $g$  στο διάστημα  $[\rho, 2]$ , αφού ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο  $[\rho, 2]$ , παραγωγίσιμη στο  $(\rho, 2)$  και ακόμα  $g(\rho) = g(2) = -2$ . Επομένως, υπάρχει  $x_0 \in (\rho, 2)$  τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = 0 \quad (3)$$

Αλλά η  $g'$  είναι γνησίως αύξουσα οπότε:

$$\rho < x_0 < 2 \Rightarrow g'(\rho) < g'(x_0) < g'(2) \Rightarrow g'(\rho) < 0 < g'(2)$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

**Δ3.** Έστω  $x_0 < x < 2$ . Θέτουμε

$$u = \frac{x-3}{g(x)+2}$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow 2^-} u = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-3}{g(x)+2} = +\infty$  διότι:

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-3) = -1 < 0$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} [g(x)+2] = 0$

•  $g(x) + 2 < 0$ , γιατί από την μονοτονία της  $g'$  είναι

$$x > x_0 \Rightarrow g'(x) > g'(x_0) \Rightarrow g'(x) > 0,$$

που σημαίνει ότι η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[x_0, +\infty)$ . Έτσι

$$x_0 < x < 2 \Rightarrow g(x) < g(2) \Rightarrow g(x) < -2 \Rightarrow g(x) + 2 < 0$$

Στη συνέχεια το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g\left(\frac{x-3}{g(x)+2}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u)$$

Η εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο της  $M(2, g(2))$  έχει εξίσωση:

$$y - g(2) = g'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y = g'(2)x - 2g'(2) + g(2)$$

Επειδή η  $g'$  είναι γνησίως αύξουσα η  $g$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , οπότε τα σημεία της  $C_g$  είναι πάνω από τα αντίστοιχα σημεία της εφαπτομένης της, εκτός του σημείου επαφής, επομένως για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geq g'(2)x - 2g'(2) + g(2) \quad (4)$$

Επειδή  $g'(2) > 0$  είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g'(2)x - 2g'(2) + g(2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [g'(2)x] = +\infty$$

Αν  $h(x) = g'(2)x - 2g'(2) + g(2)$ , με  $x \in \mathbb{R}$  αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$  θα υπάρχει  $\alpha > 0$ , ώστε στο  $(\alpha, +\infty)$  είναι  $h(x) > 0$  οπότε από (4) είναι

$$g(x) \geq h(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{h(x)}$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{h(x)} = 0$ , από κριτήριο παρεμβολής θα είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$ .

Αν  $\varphi(x) = \frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(x)} = +\infty \Rightarrow \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = +\infty,$$

διότι είναι  $\varphi(x) > 0$  στο  $(\alpha, +\infty)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ .

Ωστε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g\left(\frac{x-3}{g(x)+2}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = +\infty$$

**Δ4.** Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την  $x = 1$ . Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική. Πράγματι είναι:

$$g(1+x-x^3) = g(1) + g(x) - g(x^3) \Leftrightarrow g(1+x-x^3) - g(1) = g(x) - g(x^3) \quad (5)$$

- Αν υποθέσουμε ότι  $x > 1$ , τότε θεωρούμε τα διαστήματα  $[1+x-x^3, 1]$  και  $[x, x^3]$ . Αυτά είναι καλώς ορισμένα και ξένα μεταξύ τους, αφού ισχύουν  $1 < x < x^3$  και  $1+x-x^3 < 1 \Leftrightarrow x < x^3$ , δηλαδή  $1+x-x^3 < 1 < x < x^3$ .

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2014**

**E\_3.Μλ3ΘΤ(α)**

Εφαρμόζεται, τώρα, για την  $g$  το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα  $[1+x-x^3, 1]$  και  $[x, x^3]$ , γιατί η  $g$  είναι συνεχής σ' αυτά και παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα ανοιχτά διαστήματα. Υπάρχουν, επομένως,  $\xi_1, \xi_2$  με

$$1+x-x^3 < \xi_1 < 1 < x < \xi_2 < x^3, \quad (6)$$

τέτοια ώστε

$$\frac{g(1)-g(1+x-x^3)}{x^3-x} = g'(\xi_1) \quad \text{και} \quad \frac{g(x^3)-g(x)}{x^3-x} = g'(\xi_2)$$

Λόγω της (5):

$$-g'(\xi_1) = -g'(\xi_2) \Rightarrow g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$$

Άτοπο, γιατί από την (6) και την μονοτονία της  $g'$  είναι

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow g'(\xi_1) < g'(\xi_2)$$

- Πάλι, αν υποθέσουμε ότι  $0 < x < 1$ , τότε εργαζόμαστε στα διαστήματα  $[1, 1+x-x^3]$  και  $[x^3, x]$ . Αυτά είναι καλώς ορισμένα και ξένα μεταξύ τους, αφού ισχύουν  $x^3 < x < 1$  και  $1 < 1+x-x^3 \Leftrightarrow x^3 < x$ , δηλαδή

$$x^3 < x < 1 < 1+x-x^3$$

Εφαρμόζεται, ομοίως, για την  $g$  το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα  $[1, 1+x-x^3]$  και  $[x^3, x]$ , γιατί η  $g$  είναι συνεχής σ' αυτά και παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα ανοιχτά διαστήματα. Υπάρχουν, επομένως,  $\xi_1, \xi_2$  με

$$x^3 < \xi_2 < x < 1 < \xi_1 < 1+x-x^3, \quad (7)$$

τέτοια ώστε

$$\frac{g(1+x-x^3)-g(1)}{x-x^3} = g'(\xi_1) \quad \text{και} \quad \frac{g(x)-g(x^3)}{x-x^3} = g'(\xi_2)$$

Λόγω της (5):

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$$

Άτοπο, γιατί από την (7) και την μονοτονία της  $g'$  είναι

$$\xi_2 < \xi_1 \Rightarrow g'(\xi_2) < g'(\xi_1)$$

Ωστε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την προφανή  $x = 1$ .