

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΆΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 16 Απριλίου 2014

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. Να δώσετε τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 4

A.2. Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$, για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

A.3. Να δώσετε τον ορισμό του λογαρίθμου με βάση a , ενός θετικού αριθμού θ όπου $a > 0$ και $a \neq 1$.

Μονάδες 4

A.4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις, γράφοντας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστή**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ένα γραμμικό σύστημα 2×2 αν έχει περισσότερες από μία διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρες.

β) Αν $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f παρουσιάζει κατ' ανάγκη (ολικό) ελάχιστο στο 0.

γ) Για κάθε γωνία θ που ορίζονται η $\epsilon\phi\theta$ και η $\sigma\phi\theta$, ισχύει $\sigma\phi\theta \cdot \epsilon\phi\theta \neq 0$.

δ) Το μηδενικό πολυώνυμο, έχει βαθμό ίσο με μηδέν.

ε) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^{\ln x} = x$.

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

ΘΕΜΑ Β

Έστω $P(x) = x^3 + 2ax^2 - a^2x + 2$ πολυώνυμο, $a \in \mathbb{R}$. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρεθεί με το $x - 1$, δίνει υπόλοιπο $3a + 1$.

B.1. Να βρείτε τις τιμές του αριθμού a .

Μονάδες 7

B.2. Για $a = 1$ και πολυώνυμο $Q(x) = x^2 + x + 1$:

α) Να αποδείξετε ότι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της Ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το $Q(x)$ είναι $x + 1$ και $-3x + 1$ αντίστοιχα.

Μονάδες 4

β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x) + x - 2}{Q(x)} \geq 1$.

Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\pi(x) = \sqrt{Q(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \beta x\right)$ όπου $a \in \mathbb{R}$ και $0 \leq \beta \leq 1$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0, -2)$, $B(\pi, -1)$.

Γ.1. Να βρείτε τις τιμές των a και β .

Μονάδες 8

Αν $f(x) = -2 \sin\left(\frac{x}{3}\right)$

Γ.2. α) Να βρείτε τη μέγιστη, την ελάχιστη τιμή της f και την περίοδό της.

Μονάδες 4

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 6\pi]$ και να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο ίδιο διάστημα.

Μονάδες 4

Γ.3. Δίνεται το γραμμικό σύστημα:

$$(\Sigma) \begin{cases} \lambda f(0)x + f(2014\pi)y = 4\lambda \\ \lambda f(-\pi)x + \lambda f(2\pi)y = 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) ώστε το παραπάνω σύστημα να έχει άπειρες λύσεις καθώς και τη μορφή των απείρων λύσεων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{4-2^x}{4 \cdot 2^x - 1}\right)$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $A = (-2, 2)$.

Μονάδες 6

Δ.2. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Μονάδες 5

Δ.3. Να βρείτε (αν υπάρχει) την τεταγμένη του σημείου τομής της γραφικής παράστασης της f με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = x \ln 2 - \ln 3$.

Μονάδες 6

Δ.4. Να λύσετε την ανίσωση $-\ln^2(e^2) \cdot f(x) > 4 \cdot f(-x) + \ln^2|x| - \ln x^2 - 3$.

Μονάδες 8

Σας ευχόμαστε επιτυχία.