ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

Ημερομηνία: Κυριακή 13 Απριλίου 2014
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

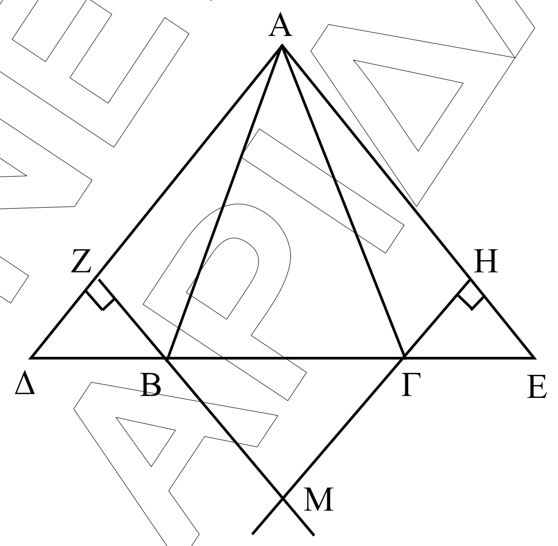
ΘΕΜΑ Α

Α1. Παρ. 3.5 σελ. 62, Θεώρημα ΙΙ

Α2. **α)** Σωστό, **β)** Σωστό, **γ)** Λάθος.

Α3. **α.** i, **β.** ii

ΘΕΜΑ Β

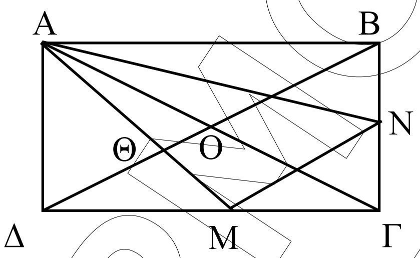


Β1. Αφού ΔΒ = ΓΕ, ΑΒ = ΑΓ, $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Gamma}E$, (σαν παραπληρωματικές των προσκείμενων στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, ίσων γωνιών Β και Γ) θα είναι $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Gamma E}$ οπότε ΑΔ = ΑΕ, δηλαδή $\overset{\triangle}{A\Delta E}$ ισοσκελές.

Β2. Έχουμε ΔΒ = ΓΕ, $\hat{Z} = \hat{H} = 90^o$ και $\hat{\Delta} = \hat{E}$ (προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ). Άρα $\overset{\triangle}{\Delta BZ} = \overset{\triangle}{\Gamma EH}$ οπότε ΒΖ=ΓΗ.

Β3. Έχουμε $\mathrm{M\hat{B}\Gamma = M\hat{\Gamma}B}$, σαν κατακορυφήν των ίσων γωνιών ΔΒΖ και ΕΓΗ των ίσων τριγώνων του προηγούμενου ερωτήματος, οπότε το τρίγωνο ΒΓΜ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ



Γ1. Είναι ΑΓ = 2ΑΔ και $\mathrm{A\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta}$ ορθογώνιο στο Δ, οπότε $\mathrm{A\hat{\Gamma}\Delta = 30^o}$ και $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma = 90^o - A\hat{\Gamma}\Delta = 60^o}$.

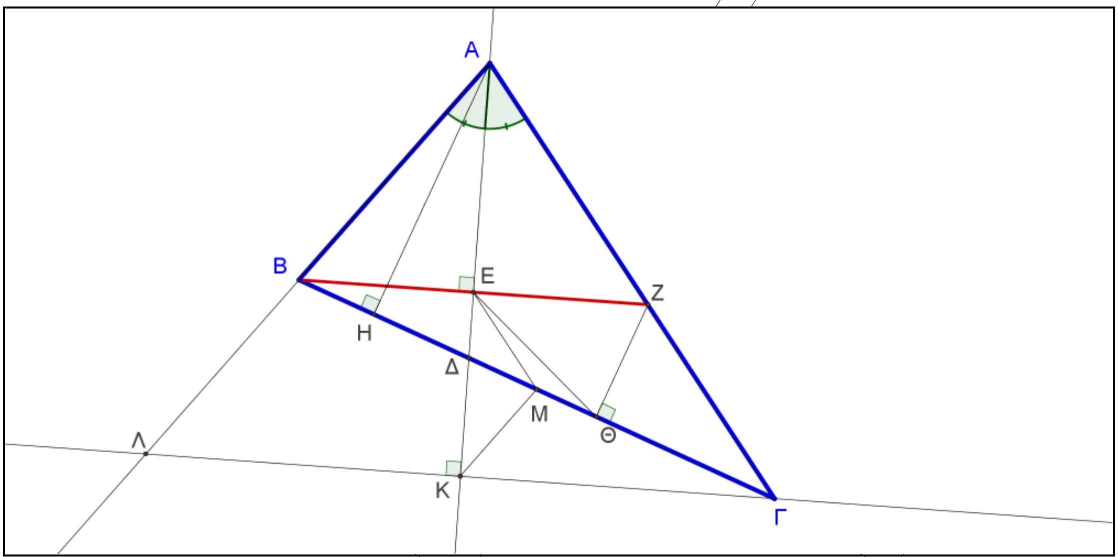
Είναι $\mathrm{AO = \frac{1}{2}A\Gamma}$ **=ΑΔ.** Αφού διχοτομούνται και είναι ίσες οι διαγώνιες του ορθογωνίου θα έχουμε $\mathrm{\Delta O = \frac{1}{2}\cdot \Delta B = \frac{1}{2}\cdot A\Gamma = A\Delta}$.

Άρα το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισόπλευρο, δηλαδή οι γωνίες του είναι 60^{o} η κάθε μία.

Γ2. Είναι ΔΟ διάμεσος του $\mathrm{A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma}$ και ΑΜ διάμεσος του $\mathrm{A\overset{\triangle}{\Delta}\Gamma}$, οπότε Θ βαρύκεντρο του ΑΒΓ.
Άρα $\mathrm{\Delta\Theta = 2\cdot \Theta O} = 2\alpha$.
και $\mathrm{\Delta O = 3\Theta O} = 3\alpha$ οπότε $\mathrm{B\Delta = 2\Delta O} = 6\alpha = \mathrm{A\Gamma}$ (διότι οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες).
Όμως $\mathrm{A\Delta = \frac{1}{2}A\Gamma} = \frac{1}{2}6\alpha = 3\alpha$.

Γ3. Αφού Μ μέσο ΔΓ και Ν μέσο ΓΒ θα είναι ΜΝ//ΒΔ δηλαδή ΒΝΜΔ τραπέζιο με διάμεσο $\delta = \frac{\mathrm{B\Delta + MN}}{2} = \frac{6\alpha + 3\alpha}{2} = \frac{9\alpha}{2}$ αφού το τμήμα ΜΝ είναι το μισό της ΒΔ.

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Αφού ΑΕ είναι διχοτόμος και ύψος στο $\overset{\Delta}{\mathrm{ABZ}}$ θα είναι $\overset{\Delta}{\mathrm{ABZ}}$ ισοσκελές και ΑΕ διάμεσος, δηλαδή Ε μέσο του ΒΖ και ΒΕ = ΕΖ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{Z\Theta B}}$ η ΘΕ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα ΒΖ, άρα $\mathrm{E\Theta} = \frac{\mathrm{BZ}}{2} = \mathrm{BE}$, οπότε το τρίγωνο ΒΕΘ είναι ισοσκελές.

Δ2. Το τετράπλευρο ΑΒΗΕ είναι εγγράψιμο αφού η πλευρά ΑΒ φαίνεται από τις κορυφές Η και Ε με ίσες γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{H}}\mathrm{A} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = 90^o$.

Δ3. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{ABZ}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Lambda\Gamma}}$ είναι ισοσκελή αφού η διχοτόμος της γωνίας Α ταυτίζεται με τα αντίστοιχα ύψη τους. Άρα ΑΒ = ΑΖ και ΑΛ = ΑΓ οπότε αφαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη προκύπτει ΒΛ = ΖΓ.

Δ4. Τα Ε και Μ είναι μέσα των πλευρών ΒΖ και ΒΓ του τριγώνου ΒΖΓ οπότε $\mathrm{EM} = //\frac{\mathrm{Z\Gamma}}{2}$ και τα Μ και Κ είναι μέσα των πλευρών ΒΓ και ΛΓ του τριγώνου ΓΒΛ οπότε $\mathrm{MK} = //\frac{\mathrm{B\Lambda}}{2}$. Αφού ΒΛ = ΓΖ θα είναι και ΕΜ = ΜΚ, δηλαδή το τρίγωνο ΕΜΚ είναι ισοσκελές και από τις προηγούμενες παραλληλίες έχουμε $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\Delta = \hat{\Gamma}$ (εντός – εκτός και επί τα αυτά μέρη) και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{K} = \hat{\mathrm{B}}$ (εντός εναλλάξ), οπότε $\mathrm{E}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{K} = \hat{\Gamma} + \hat{\mathrm{B}} = 180^o - \hat{\mathrm{A}}$.