

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ. (Α΄ ΟΜΑΔΑ)

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 76

A2. $\alpha \rightarrow \Sigma, \beta \rightarrow \Lambda, \gamma \rightarrow \Lambda, \delta \rightarrow \Sigma, \varepsilon \leftrightarrow \Sigma.$

A3. α. $\int_a^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f(x) \cdot g'(x)dx$

β. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

γ. Αν διαιρέσουμε την συχνότητα v_i μιας μεταβλητής X με το μέγεθος n του δείγματος προκύπτει η σχετική συχνότητα της τιμής x_i .

ΘΕΜΑ Β

B1.

Πλήθος λανθασμένων απαντήσεων x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική σχετική συχνότητα $F_i\%$	$x_i \cdot v_i$
0	13	13	26	26	0
1	14	27	28	54	14
2	13	40	26	80	26
3	5	45	10	90	15
4	5	50	10	100	20
ΣΥΝΟΛΑ	50		100		75

B2. Η μέση τιμή θα είναι $\bar{x} = \frac{v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + v_4x_4 + v_5x_5}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5} = \frac{75}{50} = 1,5.$

B3. Αφού έχουμε 50 παρατηρήσεις και είναι διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά , τότε μεσαίες παρατηρήσεις είναι η $25^{\text{η}}$ και η $26^{\text{η}}$. Και οι δυο είναι ίσες με 1, οπότε $\delta = \frac{1+1}{2} = 1$.

Η επικρατούσα τιμή είναι και αυτή 1, αφού αυτή η τιμή έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα.

B4. Από τον πίνακα διαπιστώνουμε ότι τουλάχιστον τρεις λανθασμένες απαντήσεις, δηλαδή 3 ή 4 λανθασμένες απαντήσεις, έδωσαν $5+5=10$ μαθητές.

B5. Από την στήλη αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων του πίνακα συχνοτήτων διαπιστώνουμε ότι το πολύ δυο λανθασμένες απαντήσεις έδωσε το 80% των μαθητών.

ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned} \Gamma 1. \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} - 7 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} - 7 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4} - 7 \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[(\sqrt{x+2}+2) - 7 \right] = \sqrt{2+2}+2-7 = \\ &= 2+2-7 = -3. \end{aligned}$$

$$\Gamma 2. \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{ax^2}{4} - 2a^2 \right) = \frac{a \cdot 2^2}{4} - 2a^2 = a - 2a^2.$$

$$\Gamma 3. \quad \text{Πρέπει } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow -3 = a - 2a^2 \Leftrightarrow 2a^2 - a - 3 = 0.$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2(-3) = 1 + 24 = 25,$$

$$\alpha = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{matrix} \nearrow \frac{3}{2} \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

Δεκτή η $\alpha = -1$ αφού $\alpha < 0$.

$$\Gamma 4. \quad \text{Για } \alpha = -1 \text{ έχω } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} - 7, & x < 2 \\ -\frac{x^2}{4} - 2, & x \geq 2 \end{cases}.$$

Άρα

$$\int_2^4 -\frac{f(x)}{x} dx = \int_2^4 \left(\frac{x}{4} + \frac{2}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \ln x \right]_2^4 = \left(\frac{1}{8} \cdot 4^2 + 2 \ln 4 \right) - \left(\frac{1}{8} \cdot 2^2 + 2 \ln 2 \right) =$$

$$= 2 + 4 \ln 2 - \frac{1}{2} - 2 \ln 2 = \frac{3}{2} + 2 \ln 2.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = (x^3 - ax^2 + \beta x)' = 3x^2 - 2ax + \beta.$

Αφού είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ακρότατο το 0 αν $x_1 = 3$ θα είναι $f'(3) = 0$ και $f(3) = 0.$

Δ2. Έχω $\left. \begin{matrix} f'(3) = 0 \\ f(3) = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 3 \cdot 3^2 - 2a \cdot 3 + \beta = 0 \\ 3^3 - a \cdot 9 + 3\beta = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} -6a + \beta = -27 \\ -9a + 3\beta = -27 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} -6a + \beta = -27 \\ 3a - \beta = 9 \end{matrix} \right\} \stackrel{(+)}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} -3a = -18 \\ \beta = -27 + 6a \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} a = 6 \\ \beta = 9 \end{matrix} \right\}$$

Δ3. Αν $a=6$ και $\beta=9$ είναι:

i. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$

Αν $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3.$

Το πρόσημο της $f'(x)$ και η μονοτονία της $f(x)$ φαίνονται στο πίνακα:

x	1	3
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘
	τ.μ.	τ.ε.

Άρα $f \uparrow (-\infty, 1], f \downarrow [1, 3]$ και $f \uparrow [3, +\infty).$

ii. Έχει τ.μ. το $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4$ και τ.ε. το $f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$

iii. Είναι $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 < 0$ για $1 < x < 3.$

Άρα $E = \int_1^3 -f'(x) dx = \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9) dx = \left[-x^3 + 6x^2 - 9x \right]_1^3 =$
 $= (-27 + 54 - 27) - (-1 + 6 - 9) = 0 - (-4) = 4$ τ.μ.