Β' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0.

(8 Μόρια)

Α.2. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να γράψετε τα αναπτύγματα των τύπων $\log_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)$ και $\log_\alpha(\theta_1\theta_2)$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

(2 Μόρια)

Α.3. Τι γνωρίζετε για την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$.

(3 Μόρια)

Α.4. Να γράψετε στο τετράδιό σας για κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1453}{2011}\eta\mu(2x)$ έχει περίοδο :

Α: $T = \pi + \frac{\pi}{4}$ **Β:** $T = \pi$ **Γ:** $T = -2\pi$

Δ: $T = \frac{\pi}{2}$ **Ε:** $T = \frac{1453}{2011}$

(2 Μόρια)

β. Το άθροισμα των συντελεστών του πολυωνύμου

$$P(x) = \left(x^4 - 3x^2 + 2x\right)^{15} - x^5 + 4x \text{ είναι :}$$

Α: $2^{15} + 4$ **Β:** 1 **Γ:** 3

Δ: 5 **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα.

(2 Μόρια)

γ. Αν $S_ν$ συμβολίζει το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$ με λόγο $λ \neq 1$ και πρώτο όρο $α_1$, τότε είναι :

Α: $S_ν = α_1 \dfrac{λ-1}{λ^ν-1}$ **Β:** $S_ν = α_1 \dfrac{λ^ν-1}{λ-1}$ **Γ:** $S_ν = \dfrac{α_1 λ^ν-1}{λ-1}$

Δ: $S_ν = α_1 \dfrac{1-λ^ν}{λ-1}$ **Ε:** κανένα από τα προηγούμενα

(2 Μόρια)

Α.5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Κάθε σταθερό μη μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

(2 Μόρια)

β. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = εφx$ είναι περιοδική με περίοδο $T = \dfrac{2}{π}$.

(2 Μόρια)

γ. Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = α^x β^x$ όπου $α>0$, $β>0$ με $α \neq 1$, $β \neq 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όταν $α < \dfrac{1}{β}$.

(2 Μόρια)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = α \cdot συν\left(\dfrac{βx}{2}\right)$ (1), όπου $β<0$ και $α \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, β+5)$, και $B\left(\dfrac{4π}{β}, 4β^2\right)$ τότε:

Β.1. Να αποδείξετε ότι $α = 4$ και $β = -1$.

(7 Μόρια)

Β.2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία y=4 στο διάστημα $[0, 12π]$.

(7 Μόρια)

Β.3. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς και την περίοδό της.

(6 Μόρια)

Β.4. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $A=f(4\pi)-f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ και

$$B=3f(0)\frac{f(0)^{2010}-1}{f(0)-1}+4$$

(5 Μόρια)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται πολυώνυμο $P(x)=x^4+\alpha x^3-7x^2+\beta x+2$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν η διαίρεση του $P(x)$ δια $x-1$ δίνει υπόλοιπο 1 και η αριθμητική τιμή του για $x=-2$ είναι 10, τότε:

Γ.1. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(7 Μόρια)

Γ.2. Για τις τιμές $\alpha=-5$ και $\beta=10$,

α. Να βρείτε το πηλίκο Π(x) της διαίρεσης του P(x) δια του $Q(x)=x^3+x^2-2x$ και να γράψετε το P(x) με την βοήθεια της ταυτότητας ευκλείδειας διαίρεσης.

(6 Μόρια)

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=\upsilon(x)$,όπου υ(x) το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) δια $Q(x)$.

(7 Μόρια)

γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης Q(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x.

(5 Μόρια)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{4-x}{4+x}\right)$.

Δ.1. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(5 Μόρια)

Δ.2. Να υπολογίσετε η τιμή της παράστασης

$$A=f(-3)+f(-2)+f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$$

(6 Μόρια)

Δ.3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)-f(-x)<-2\ln 3$.

(7 Μόρια)

Δ.4. Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f(x)}+3=4e^{f(x)}$.

(7 Μόρια)