



**Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να δείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$

**Μονάδες 9**

**B.** 1. Πότε η ευθεία  $\psi = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 3**

2. Πότε μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[\alpha, \beta]$ ;

**Μονάδες 3**

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως Σωστή ( $\Sigma$ ) ή Λανθασμένη ( $\Lambda$ ):

1. Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$

**Μονάδες 2**

2. Αν  $0 < \alpha < 1$  τότε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x \neq 0$ .

**Μονάδες 2**

3. Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  τότε η  $f$  έχει υποχρεωτικά ολικά ακρότατα τα  $f(\alpha)$  και  $f(\beta)$ .

**Μονάδες 2**

4. Για τις συναρτήσεις  $f$  και  $g$  που έχουν συνεχείς παραγώγους στο  $[\alpha, \beta]$  ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx - \int_{\beta}^{\alpha} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

**Μονάδες 2**

5. Αν για κάθε στοιχείο  $\psi$  του συνόλου τιμών της  $f(x)$ , η  $f(x) = \psi$  έχει λύση ως προς  $x$  τότε η  $f$  είναι 1-1.

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $z + \frac{1}{z} = -1$ ,  $z \in \mathbb{C}$  και  $z_1, z_2$  οι ρίζες της. Να αποδείξετε ότι:

**A.**  $z_1 \cdot z_2 = 1$  και  $z_1^3 = 1$ .

**Μονάδες 4**

**B.**  $(z_1^{2009} + z_2^{2009}) \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

**Γ.**  $z_1^8 + \frac{1}{z_2^{10}} + 1 = 0$

**Μονάδες 4**

**Δ.** Αν  $f(x)$  συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $[0,1]$  με

$$f(0) - 2 = \frac{z_1 + z_2}{z_2 + z_1} \text{ και } f(1) = \frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} - \frac{3}{2}$$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$ , ώστε  $f(x_0) = 3x_0 - 2$ .

**Μονάδες 7**

**E.** Αν  $\Gamma$  είναι η εικόνα του μιγαδικού  $w = 2z_1 + 2z_2$  και  $A, B$  οι εικόνες των  $z_1$  και  $z_2$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

**Μονάδες 6****ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + 2 + 2\ln x$ .

**A.** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή ή κοίλη.

**Μονάδες 6**

**B.** Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της  $f$ .

**Μονάδες 6**

**Γ.** Αν  $g(x) = \frac{x \cdot \ln x}{x+2}$  να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 > 0$  ώστε:

$$g(x) \geq g(x_0) \text{ για κάθε } x > 0.$$

**Μονάδες 7**

**Δ.** Να δείξετε ότι για κάθε  $x > 2$  ισχύει:  $f(x-2) < 2f(x+1) - f(x+4)$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f' \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{x+1}{e^x} \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{1}{e}$$

**A.** Να δείξετε ότι  $f(x) = x \cdot e^{-1/x}$ .

**Μονάδες 8**

**B.** 1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f(x)$  στο σημείο με τετμημένη  $x = 1$ .

**Μονάδες 2**

2. Να δείξετε ότι  $\int_1^2 f(x) dx > \frac{2}{e}$ .

**Μονάδες 7**

**Γ.** Αν  $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$ , να βρείτε το εμβαδόν  $E(t)$  του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_g$ , τον  $x'$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=t$  με  $t \geq 1$ .

**Μονάδες 5**

**Δ.** Να βρείτε το  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E(t)$ .

**Μονάδες 3**