επαναληπτικά θέματα 2006

ΤΕΕ Β' ΚΥΚΛΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

i. v=100

ΕΤΗ	v_i	N_i	f_i	F_i	$f_i \cdot 360^0$	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΕΩΝ O_i	$O_i \cdot v_i$
[0,5)	10	10	0,1	0,1	36^0	2,5	25
[5,10)	15	25	0,15	0,25	54^0	7,5	112,5
[10,15)	40	65	0,4	0,65	144^0	12,5	500
[15,20)	20	85	0,2	0,85	72^0	17,5	350
[20,25)	10	95	0,1	0,95	36^0	22,5	225
[25,30)	5	100	0,05	1	$x^0=18^0$	27,5	137,5
ΣΥΝΟΛΟ	v=100		1		360^0		1350

Άρα $36+54+144+72+36+x=360 \Leftrightarrow x=18^0$ και

$f_1=\dfrac{36}{360}=0,1$ $\quad f_2=\dfrac{54}{360}=0,15$ $\quad f_3=\dfrac{144}{360}=0,4$

$f_4=\dfrac{72}{360}=0,1$ $\quad f_5=f_1=0,1$ $\quad f_6=\dfrac{18}{360}=0,05$

$f_i=\dfrac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i=f_i \cdot v$, επομένως:

$v_1=0,1 \cdot 100=10$

$v_2=0,15 \cdot 100=15$

$v_3=0,4 \cdot 100=40$

$v_4=0,2 \cdot 100=20$

$v_5=0,1 \cdot 100=10$

$v_6=0,05 \cdot 100=5$

ii. μέση τιμή: $\overline{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{6} O_i \cdot v_i}{v}=\dfrac{1350}{100}=13,5$ έτη

iii. τουλάχιστον 10 έτη εργάζονται: 40+20+10+5=75 υπάλληλοι.

ΘΕΜΑ 2ο

$f(x) = x^2 - 2\ln x, \qquad x > 0$

i. $f'(x)=2x - \dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-2}{x}$, $x>0$

ii. $f(1)=1$

$f'(1)=0$

iii. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-2}{x}=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x^2-2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$	
$f(x)$			$\searrow$	Ε	$\nearrow$	

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>1$.

iv. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=1$ το $f(1)=1$.

ΘΕΜΑ 3ο

Α.

i. $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+1, \qquad x \in R$

Ισχύει $f(\frac{1}{2})=0$ και $f(-1)=-6$, άρα $f(\frac{1}{2})=0 \Leftrightarrow \alpha\cdot\frac{1}{8}+\beta\cdot\frac{1}{4}+1=0 \Leftrightarrow \alpha+2\beta+8=0$

$\Leftrightarrow \alpha+2\beta=-8$ (1) και

$f(-1)=-6 \Leftrightarrow -\alpha+\beta+1=-6 \Leftrightarrow \alpha-\beta=7$ (2)

Αφαιρώντας την (2) από την (1) έχουμε: $3\beta=-15 \Leftrightarrow \beta=-5$ και $\alpha=2$.

Συνεπώς $(\alpha, \beta)=(2, -5)$.

ii. Επομένως $f(x)=2x^3-5x^2+1$ με $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{f(x)}{2x^2+x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^3-5x^2+1}{2x^2+x-1}$ (1)

Horner 1

2	-5	0	1	½
$\downarrow$	1	-2	-1	
2	-4	-2	0	

$(2x^2-4x-2)(x-\frac{1}{2})$ (2)

Horner 2

2	1	-1	½
$\downarrow$	1	1	
2	2	0	

$(2x+2)(x-\frac{1}{2})$ (3)

Από (1), (2), (3): $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(2x^2-4x-2)(x-\frac{1}{2})}{(2x+2)(x-\frac{1}{2})} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-4x-2}{2x+2} =$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{4}-2-2}{3} = \frac{\frac{1}{2}-4}{3} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{8}{2}}{3} = \frac{-\frac{7}{2}}{3} = -\frac{7}{6}$$

B. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}-x+1}{x^3-27}, & -1 \le x \ne 3 \\ \alpha^2-1, & x=3 \end{cases}$

i. $D_f=[-1,+\infty)$

ii. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-(x-1)}{x^3-27} =$

$$\lim_{x\to 3} \frac{[\sqrt{x+1}-(x-1)]\cdot[\sqrt{x+1}+(x-1)]}{(x^2+3x+9)(x-3)\cdot[\sqrt{x+1}+(x-1)]} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1-(x-1)^2}{(x^2+3x+9)(x-3)\cdot[\sqrt{x+1}+(x-1)]} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1-x^2+2x-1}{(x^2+3x+9)(x-3)\cdot[\sqrt{x+1}+(x-1)]} =$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{-x^2+3x}{(x^2+3x+9)(x-3)\cdot[\sqrt{x+1}+(x-1)]}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{-x(x-3)}{(x^2+3x+9)\cdot(x-3)\cdot[\sqrt{x+1}+(x-1)]} = \frac{-3}{27\cdot 4} = \frac{-1}{36} = -\frac{1}{36}$$

iii. Αφού f συνεχής στο $x_0=3$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$ με $f(3)=\alpha^2-1$. Άρα $\alpha^2-1=-\dfrac{1}{36}$

$\Leftrightarrow 36\alpha^2-36=-1 \Leftrightarrow 36\alpha^2-35=0 \Leftrightarrow \alpha^2=\dfrac{35}{36} \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{36}}=\dfrac{\sqrt{35}}{6}$ ή

$\alpha=-\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{36}}=-\dfrac{\sqrt{35}}{6}$.

ΘΕΜΑ 4ο

i. Συνάρτηση εσόδων από την πώληση x αεροσκαφών:

Έστω $f(x)=x \cdot E(x)=3x^2+20x$

Συνάρτηση κέρδους από την πώληση x αεροσκαφών:

$K(x)=-x^2+20x-30$

Γνωρίζουμε ότι: ΚΕΡΔΟΣ = ΕΣΟΔΑ-ΕΞΟΔΑ, δηλαδή $K(x)= f(x)-P(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(x)= f(x)- K(x)= 3x^2+20x+ x^2-20x+30=4x^2+30, \qquad 0 \le x \le 20$

ii. $P(5)=4 \cdot 25+30=130$ χιλιάδες €

iii. $P(6)-P(5)=174-133=44$ χιλιάδες €

iv. $K'(x)=-2x+20$ χιλιάδες € / μονάδες προϊόντος

v. $K'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+20=0 \Leftrightarrow x=10$

x	0		10		20
$P'(x)$		+	0	-	
$P(x)$		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Επομένως το εργοστάσιο πρέπει να κατασκευάζει 10 αεροπλάνα κατ᾽ έτος για να έχει το μέγιστο κέρδος.