

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Ο.Ε.Φ.Ε. 2004

## Θέματα Άλγεβρας Β' Λυκείου Γενικής Παιδείας

### ΖΗΤΗΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α. Απαντήστε (χωρίς αιτιολόγηση) στα επόμενα ερωτήματα.

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2004 \cdot \sin(4x)$ . Γράψτε τη μέγιστη τιμή, την ελάχιστη τιμή και την περίοδο της συνάρτησης. **(3 μονάδες)**

2. Αν  $\alpha, \beta$  δύο ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί, ονομάζουμε γεωμετρικό μέσο των  $\alpha, \beta$  τον αριθμό

- $\frac{\alpha + \beta}{2}$
- $\alpha\beta$
- $\pm\sqrt{\alpha\beta}$
- $\sqrt{\alpha\beta}$

**(3 μονάδες)**

3. Συμπληρώστε σωστά την επόμενη πρόταση: Το σημείο τομής της ευθείας  $y = e^2$  και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$  είναι .....

**(3 μονάδες)**

4. Είναι σωστός ή λάθος, ο ισχυρισμός ότι «το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου  $P(x)$  με το  $x$ , είναι ο αριθμός  $P(0)$ ». **(3 μονάδες)**

Β. Έστω  $a, k$ , δύο πραγματικοί αριθμοί με  $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$  και  $k > 0$ .

1. Τι ονομάζουμε «λογάριθμο του  $k$  ως προς βάση  $a$ »; **(1 μονάδα)**

2. Δείξτε ότι  $\log_a 1 = 0$  και  $\log_a a = 1$  **(2 μονάδες)**

Γ. Δίνεται η πολυωνομική εξίσωση  $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ , με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος αριθμός  $k \neq 0$  είναι λύση της εξίσωσης, να δείξετε ότι το  $k$  είναι διαιρέτης του σταθερού όρου  $\alpha_0$ . Ισχύει το αντίστροφο; (Δικαιολογήστε την απάντησή σας). **(7 μονάδες)**

Δ. Να συγκριθούν οι θετικοί αριθμοί  $x, y$ , αν είναι γνωστό ότι, για  $a \in (1, +\infty)$ , ισχύει  $\left(\frac{1}{a}\right)^{\ln x} > \left(\frac{1}{a}\right)^{\ln y}$ . **(3 μονάδες)**

### ΖΗΤΗΜΑ 2<sup>ο</sup>

Α. Αν  $A = \frac{1 - \eta\mu 2\theta}{(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)^2}$ . Να δείξετε ότι  $A=1$ . **(10 μονάδες)**

Β. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $x \in [0, \pi]$  για τους οποίους:

$2\eta\mu^3 x - 4\eta\mu \frac{x}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 x = 0$  **(15 μονάδες)**

### ΖΗΤΗΜΑ 3<sup>ο</sup>

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^4 - (a+1)x^3 + bx^2 - bx + a$ , με  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , για το οποίο είναι γνωστό ότι έχει παράγοντα το  $(x-1)^2$  και ρίζα το 2.

1. Βρείτε τους αριθμούς  $a, b$  **(11 μονάδες)**
2. Αν  $a=6, b=17$  και  $x_1, x_2, x_3$  οι ρίζες του  $P(x)$  με  $x_1 < x_2 < x_3$ , δείξτε ότι οι αριθμοί  $x_1, x_2, x_3$ , με τη σειρά που αναφέρονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, ενώ οι αριθμοί  $e^{x_1}, e^{x_2}, e^{x_3}$ , επίσης με τη σειρά που αναφέρονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. **(6 μονάδες)**
3. Να βρεθούν τρεις αριθμοί  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  ενδιάμεσοι των  $e^{x_1}$  και  $e^{x_2}$  ώστε και οι πέντε να αποτελούν διαδοχικούς όρους της ίδιας Γεωμετρικής Προόδου. **(8 μονάδες)**

### ΖΗΤΗΜΑ 4<sup>ο</sup>

Έστω  $x, y$  θετικοί αριθμοί, με  $x \neq 1$ .

1. Δείξτε ότι ισχύει:  $\ln y \cdot \log x = \log y \cdot \ln x$  **(5 μονάδες)**
2. Αν ισχύει η ισότητα  $\left(\frac{\ln y}{\ln x}\right)^2 - 4 \frac{\log y}{\log x} + 4 = 0$  βρείτε ποια σχέση συνδέει τους αριθμούς  $x, y$ . **(8 μονάδες)**
3. Αν είναι  $y = x^2$  και το  $y$  είναι λύση της εξίσωσης  $e^{2y^2-3y+1} = (2004)^0$ , να βρείτε τους αριθμούς  $x, y$  **(5 μονάδες)**
4. Αν για το πολυώνυμο  $P(x) = x^2 - 4x + 4$  ισχύει  $P(\ln x) \leq 1$ , να δείξετε ότι  $y \in [e^2, e^6]$  **(7 μονάδες)**